

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ КЛАССА $W^r H(\delta_0)_L$

Слободан Милорадович

Пусть L пространство интегрируемых 2π -периодических функций f и пусть

$$\omega(f, \delta)_L = \sup_{|t| \leq \delta} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| dx, \quad 0 < \delta \leq \pi,$$

модуль непрерывности функции f в L .

Через

$$H(\delta_0)_L = \{f: \omega(f, \delta_0)_L \leq 1\}$$

обозначим класс функций f из L для которых модули непрерывности в фиксированной точке δ_0 , $0 < \delta_0 \leq \pi$, не превосходят единицы, а через

$$W^r H(\delta_0)_L = \{f: f^{(r)} \in H(\delta_0)_L, \quad r \in N\}$$

обозначим класс функций из L для которых r -та производная $f^{(r)} \in H(\delta_0)_L$.

На данных классах будем рассматривать задачу о верхней грани коэффициентов Фурье

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

где n -фиксированное натуральное число. Аналогичная задача в пространстве C непрерывных 2π -периодических функций рассматривана Лебегом [1] и Автором [2].

Прежде всего дадим решение задачи о приближений 2π -периодических функций в метрике C через функции из C с периодом $\frac{2\pi}{k}$ ($k \geq 2, k \in N$). Период функции f будем обозначать $\Omega(f)$. Положим

$$\bar{f}(x) = \max_{0 \leq s \leq k} f\left(x + \frac{2s\pi}{k}\right), \quad \underline{f}(x) = \min_{0 \leq s \leq k} f\left(x + \frac{2s\pi}{k}\right), \quad s \in N,$$
$$d(x) = \frac{\bar{f}(x) - \underline{f}(x)}{2}, \quad 0 \leq x \leq \frac{2\pi}{k}.$$

Справедлива такая

Лемма. Если функция f принадлежит C , $\Omega(f) = 2\pi$, то

$$(1) \quad \inf_{\Omega(\varphi) = \frac{2\pi}{k}} \|f - \varphi\|_{C[0, 2\pi]} = \|d\|_{C[0, \frac{2\pi}{k}]}.$$

Доказательство. Сразу проверяется что $d \in C$, $d(0) = d(\frac{2\pi}{k})$, $\Omega(d) = \frac{2\pi}{k}$, $\Omega(\varphi^*) = \frac{2\pi}{k}$ где $\varphi^* = \frac{\bar{f} + \underline{f}}{2}$.

Так как для любого $x \in [0, 2\pi]$, $f(x) - \varphi^*(x) \leq \bar{f}(x) - \varphi^*(x) = d(x)$, $f(x) - \varphi^*(x) \geq \underline{f}(x) - \varphi^*(x) = -d(x)$, то $|f(x) - \varphi^*(x)| \leq d(x)$ и

$$(2) \quad \|f - \varphi^*\|_{C[0, 2\pi]} \leq \|d\|_{[0, \frac{2\pi}{k}]}.$$

Учитывая что d непрерывна функция на замкнутом интервале то существует такое $x_0 \in [0, \frac{2\pi}{k}]$ что $d(x_0) = \|d\|$. Для любой φ , $\Omega(\varphi) = \frac{2\pi}{k}$,

$$\|f - \varphi\|_{C[0, 2\pi]} \geq \max_{0 \leq s \leq k} \left| f\left(x_0 + \frac{2\pi s}{k}\right) - \varphi(x_0) \right| \geq \max(\bar{f}(x_0) - \varphi(x_0), \varphi(x_0) - \underline{f}(x_0)) \geq d(x_0) = \|d\|,$$

т.е.

$$(3) \quad \|f - \varphi\|_{C[0, 2\pi]} \geq \|d\|_{C[0, \frac{2\pi}{k}]}.$$

Из (2) и (3) получается (1).

Так как множество $C[0, \frac{2\pi}{k}]$ не строго выпукло то функция с помощью которой достигается равенство, вообще говоря, (1) неединственна.

Заметим что лемма справедлива в более общем случае, когда $\Omega(\varphi) = \frac{2\pi l}{k}$, $(l, k) = 1$. Доказательство не меняется.

Теперь мы можем доказать такую теорему:

Теорема 1. Если $f \in H(\delta_0)_L$, то

$$\frac{1}{n\delta_0\pi} \leq \sup a_n(f) = \sup b_n(f) \leq \begin{cases} \frac{1}{2\pi \sin \frac{n\delta_0}{2}}, & \delta_0 \in (0, \frac{2\pi}{3\pi}] \\ \frac{1}{4\pi \sin \frac{n\delta_0}{2}}, & \delta_0 = \frac{2\pi}{(2s+1)n}, s = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

$$\sup a_n(f) = \sup b_n(f) = \frac{1}{2\pi}, \frac{2\pi}{3n} \leq \delta_0 \leq \pi.$$

Доказательство. В силу периодичности

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) \cos nxdx.$$

Следовательно, если f^* экстремальная функция для $b_n(f)$, $f^*(x + \frac{\pi}{2n})$ будет экстремальная функция для $a_n(f)$ и

$$(4) \quad \sup_{f \in H(\delta_0)_L} a_n(f) = \sup_{f \in H(\delta_0)_L} b_n(f).$$

Пусть $\delta_0 \in (0, \frac{\pi}{n}]$. Так как

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{2\pi \sin \frac{n\delta_0}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[\cos n \left(x - \frac{\delta_0}{2} \right) - \right. \\ \left. - \cos n \left(x + \frac{\delta_0}{2} \right) \right] dx = \frac{1}{2\pi \sin \frac{n\delta_0}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f \left(x + \frac{\delta_0}{2} \right) - f \left(x - \frac{\delta_0}{2} \right) \right] \cos nxdx$$

то $b_n(f) \leq \frac{1}{2\pi \sin \frac{n\delta_0}{2}}$, т.е.

$$(5) \quad \sup_{f \in H(\delta_0)_L} b_n(f) \leq \frac{1}{2\pi \sin \frac{n\delta_0}{2}}.$$

Для функции $\varphi(x) = \frac{\text{sign} \sin nx}{4n\delta_0}$,

$$\omega(\varphi, \delta_0) = \sup_{|t| \leq \delta_0} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x+t) - \varphi(x)| dx = \sup_{|t| \leq \delta_0} \frac{4nt}{4n\delta_0} = 1 \text{ и } \varphi \in H(\delta_0)_L.$$

Учитывая (4), (5) и что

$$b_n(\varphi) = \frac{1}{4n\delta_0\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin nx| dx = \frac{1}{n\delta_0\pi},$$

получаем

$$(6) \quad \frac{1}{n\delta_0\pi} \leq \sup_{f \in H(\delta_0)_L} a_n(f) = \sup_{f \in H(\delta_0)_L} b_n(f) \leq \frac{1}{2\pi \sin \frac{n\delta_0}{2}}.$$

Пусть, теперь, $\delta_0 = \frac{2\pi}{kn}$, $k \geq 2$, $k \in N$. Так как экстремальная функция f должна быть нечетна, то

$$f(x) \sim \sum_{v=1}^{\infty} b_n(f) \sin vx.$$

Тогда

$$f\left(x + \frac{\pi}{kn}\right) - f\left(x - \frac{\pi}{kn}\right) \sim \sum_{v=1}^{\infty} 2b_n(f) \sin \frac{v\pi}{kn} \cos vx.$$

Если $v = knj$, $j = 1, 2, \dots$, то

$$f\left(x + \frac{\pi}{kn}\right) - f\left(x - \frac{\pi}{kn}\right) \sim \sum_{v \neq knj}^{\infty} 2b_n(f) \sin \frac{v\pi}{kn} \cos vx,$$

и для любой 2π -периодической функции

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} [a_j(\varphi) \cos jx + b_j(\varphi) \sin jx], \\ b_n(f) &= \frac{1}{2\pi \sin \frac{\pi}{k}} \int_{\pi}^{\pi} \left[f\left(x + \frac{\pi}{kn}\right) - f\left(x - \frac{\pi}{kn}\right) \right] [\cos nx - \varphi(knx)] dx \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} |b_n(\varphi)| &\leq \frac{1}{2\pi \sin \frac{\pi}{k}} \inf_{\varphi} \max_{x \in [-\pi, \pi]} |\cos nx - \varphi(knx)| = \\ &= \frac{1}{2\pi \sin \frac{\pi}{k}} \inf_{\varphi} \|\cos x - \varphi(kx)\|_{C[0, 2\pi]} \end{aligned}$$

Так как $\Omega(\varphi(kx)) = \frac{2\pi}{k}$, то пользуясь леммой легко вычисляется что

$$\inf_{\varphi} \|\cos x - \varphi(kx)\|_{C[0, 2\pi]} = \begin{cases} 1, & k = 2s, \quad s = 1, 2, \dots, \\ \cos \frac{\pi}{2k}, & k = 2s + 1, \quad s = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Для $\delta_0 = \frac{2\pi}{n(2s+1)}$, $s = 1, 2, \dots$,

$$b_n(f) \leq \frac{\cos \frac{\pi}{2(2s+1)}}{2\pi \sin \frac{\pi}{2s+1}} = \frac{1}{4\pi \sin \frac{\pi}{2(2s+1)}},$$

т.е.,

$$(7) \quad \sup_{f \in H(\delta_0)_L} b_n(f) \leq \frac{1}{4\pi \sin \frac{n\delta_0}{4}}.$$

Из (6) и (7) получается утверждение первой части Теоремы 1. Из (7) для $\delta_0 = \frac{2\pi}{3n}$ следует что

$$(8) \quad \sup_{f \in H\left(\frac{2\pi}{3n}\right)_L} b_n(f) \leq \frac{1}{2\pi}.$$

Для функции $g(x) = \frac{1}{4} [\delta(x - \frac{\pi}{2n}) - \delta(x + \frac{\pi}{2n})]$, где δ функция Дирака, $\omega(g, \frac{2\pi}{3n})_L = 1$,

$$(9) \quad b_n(g) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\delta\left(x - \frac{\pi}{2n}\right) - \delta\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) \right] \sin nx dx = \frac{1}{2\pi}.$$

Из (8) и (9) следует

$$\sup_{f \in H(\frac{2\pi}{2n})_L} b_n(f) = \frac{1}{2\pi}.$$

Пусть, теперь, $\delta_0 > \frac{2\pi}{3n}$. Так как $\omega(g, \delta_0) = 1$, $b_n(g) = \frac{1}{2\pi}$,

$$b_n(f) \leq \frac{1}{2\pi} \omega\left(f, \frac{2\pi}{3n}\right) \leq \frac{1}{2\pi} \omega(f, \delta_0)_L,$$

то

$$\sup_{f \in H(\delta_0)_L} b_n(f) = \frac{1}{2\pi},$$

чем доказана и вторая часть Теоремы 1.

Теорема 2. Если $f \in W^r H(\delta_0)_L$, то

$$\frac{1}{n^{r+1} \delta_0 \pi} \leq \sup a_n(f) = \sup b_n(f) \leq \begin{cases} \frac{1}{2\pi n^r \sin \frac{n\delta_0}{2}}, & \delta_0 \in (0, \frac{2\pi}{3n}] \\ \frac{1}{4\pi n^r \sin \frac{n\delta_0}{4}}, & \delta_0 = \frac{2\pi}{n(2s+1)}, s = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\sup a_n(f) = \sup b_n(f) = \frac{1}{2\pi n^r}, \quad \delta_0 \in \left[\frac{2\pi}{3n}, \pi \right].$$

Доказательство. Интегрируя по частям получаем что

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi n^r} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(x) \cos\left(nx + \frac{r\pi}{2}\right) dx,$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi n^r} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(x) \sin\left(nx + \frac{r\pi}{2}\right) dx$$

и повторяя те же самые рассуждения как в Теореме 1. получаем доказательство Теоремы 2.

Из Теоремы 1. и 2. получается асимптотическая формула как

Следствие. Если $f \in W^r H(\delta_0)_L (W^0 H(\delta_0)_L = H(\delta_0)_L)$, то

$$\sup b_n(f) = \sup a_n(f) \approx \frac{1}{n^{r+1} \delta_0 \pi} \text{ при } \delta_0 \rightarrow 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Lebesgue H., *Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz*, Bull. Soc. Math. France, 38 (1910), 184–210.
- [2] Miloradović S., *Апроксимације функција Фурјејер-овим сумата и горња граница Фурјејер-ових коефицијената*, магистарски рад, Београд 1977, стр. 51.

Београд
Јурија Гагарина 115/82