

Some remarks on almost rational torsion points

par JOHN BOXALL et DAVID GRANT

RÉSUMÉ. Lorsque G désigne un groupe algébrique sur un corps parfait k , Ribet a défini l'ensemble des points de torsion presque rationnels $G_{\text{tors},k}^{\text{ar}}$ de G sur k . Si d, g désignent des entiers positifs, nous montrons qu'il existe un entier $U_{d,g}$ tel que, pour tout tore T de dimension au plus d sur un corps de nombres de degré au plus g , on ait $T_{\text{tors},k}^{\text{ar}} \subseteq T[U_{d,g}]$. Nous montrons le résultat analogue pour les variétés abéliennes à multiplication complexe puis, sous une hypothèse supplémentaire, pour les courbes elliptiques sans multiplication complexe. Enfin, nous montrons que, à l'exception d'un ensemble fini explicite de variétés semi-abéliennes G sur un corps fini, $G_{\text{tors},k}^{\text{ar}}$ est infini et nous utilisons ce résultat pour montrer que pour toute variété abélienne sur un corps p -adique k , il existe une extension finie de k sur laquelle $A_{\text{tors},k}^{\text{ar}}$ est infini.

ABSTRACT. For a commutative algebraic group G over a perfect field k , Ribet defined the set of almost rational torsion points $G_{\text{tors},k}^{\text{ar}}$ of G over k . For positive integers d, g , we show there is an integer $U_{d,g}$ such that for all tori T of dimension at most d over number fields of degree at most g , $T_{\text{tors},k}^{\text{ar}} \subseteq T[U_{d,g}]$. We show the corresponding result for abelian varieties with complex multiplication, and under an additional hypothesis, for elliptic curves without complex multiplication. Finally, we show that except for an explicit finite set of semi-abelian varieties G over a finite field k , $G_{\text{tors},k}^{\text{ar}}$ is infinite, and use this to show for any abelian variety A over a p -adic field k , there is a finite extension of k over which $A_{\text{tors},k}^{\text{ar}}$ is infinite.

Manuscrit reçu le 1er mars 2004.

Mots clefs. Elliptic curves, torsion, almost rational.

The first author was enjoying the hospitality of the University of Colorado at Boulder while working on the paper.

John BOXALL
Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme, CNRS – UMR 6139
Université de Caen
boulevard Maréchal Juin
BP 5186, 14032 Caen cedex, France
E-mail : `boxall@math.unicaen.fr`

David GRANT
Department of Mathematics
University of Colorado at Boulder
Boulder, Colorado 80309-0395 USA
E-mail : `grant@boulder.colorado.edu`