

Algebraic independence over \mathbb{Q}_p

par PETER BUNDSCHUH et KUMIKO NISHIOKA

RÉSUMÉ. Soit $f(x)$ une série entière $\sum_{n \geq 1} \zeta(n)x^{e(n)}$, où $(e(n))$ est une suite récurrente linéaire d'entiers naturels, strictement croissante, et $(\zeta(n))$ une suite de racines de l'unité dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$, qui satisfait à une hypothèse technique convenable. Alors nous nous sommes particulièrement intéressés à caractériser l'indépendance algébrique sur \mathbb{Q}_p des éléments $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_t)$ de \mathbb{C}_p en fonction des $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \mathbb{Q}_p$, deux à deux distincts, avec $0 < |\alpha_\tau|_p < 1$ pour $\tau = 1, \dots, t$. Une application remarquable de notre résultat principal dit que, dans le cas $e(n) = n$, l'ensemble $\{f(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{Q}_p, 0 < |\alpha|_p < 1\}$ est algébriquement indépendant sur \mathbb{Q}_p , si $(\zeta(n))$ satisfait à "l'hypothèse technique". Nous terminerons par une conjecture portant sur des suites $(e(n))$ plus générales.

ABSTRACT. Let $f(x)$ be a power series $\sum_{n \geq 1} \zeta(n)x^{e(n)}$, where $(e(n))$ is a strictly increasing linear recurrence sequence of non-negative integers, and $(\zeta(n))$ a sequence of roots of unity in $\overline{\mathbb{Q}_p}$ satisfying an appropriate technical condition. Then we are mainly interested in characterizing the algebraic independence over \mathbb{Q}_p of the elements $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_t)$ from \mathbb{C}_p in terms of the distinct $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \mathbb{Q}_p$ satisfying $0 < |\alpha_\tau|_p < 1$ for $\tau = 1, \dots, t$. A striking application of our basic result says that, in the case $e(n) = n$, the set $\{f(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{Q}_p, 0 < |\alpha|_p < 1\}$ is algebraically independent over \mathbb{Q}_p if $(\zeta(n))$ satisfies the "technical condition". We close with a conjecture concerning more general sequences $(e(n))$.

Peter BUNDSCHUH
Mathematisches Institut
Universität zu Köln
Weyertal 86-90
50931 Köln, Germany
E-mail : pb@math.uni-koeln.de

Kumiko NISHIOKA
Mathematics, Hiyoshi Campus
Keio University

Manuscrit reçu le 21 mars 2003.

This work was done during the second-named author's stay at the University of Cologne supported by the Alexander von Humboldt Foundation. Both authors are very grateful to the foundation for giving them the opportunity for collaboration.

4-1-1 Hiyoshi, Kohoku-ku
Yokohama 223-8521, Japan
E-mail : nishioka@math.hc.keio.ac.jp