Journ@l Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique

Electronic Journ@l for History of Probability and Statistics

Vol 2, n°1b; Novembre/November 2006

www.jehps.net

Les statisticiens du XIX^{e} siècle lecteurs de Jacques Bernoulli

Michel Armatte[1]

Résumé

Quelle lecture de *l'Ars Conjectandi* font les statisticiens du XIXe siècle ? Pour savoir déjà quels sont ceux qui se réfèrent à J. Bernoulli, nous interrogeons une table des citations construite sur la base d'un corpus d'une quarantaine de traités de Statistique ou de Probabilité d'avant 1914. Puis nous quittons ce point de vue aérien d'une statistique de la Statistique pour plonger dans quelques uns des ouvrages les plus importants de la période – ceux de Lacroix, Quetelet, Cournot, Bertrand et Carvallo - et nous faire une idée plus précise des exposés, déformations, usages, traductions du théorème de J. Bernoulli qu'ils ont opérés. Ce qui fournit une image de la place du calcul des probabilités chez ces statisticiens.

Abstract

What is the reading of *Ars Conjectandi* by the statisticians during the XIXth century? To know who they are, we begin with a statistical analysis of citations in a sample of text-books in Statistics or Probability before 1914. Then we stop this bird's point of view and we go into the most famous treatises of this period by Lacroix, Quetelet, Cournot, Bertrand and Carvallo. So we get a good vision of the manner in which they give a full account and use of the Bernoulli's theorem, and more generally a good vision of the place of probability for theses statisticians.

***

Repérer les traces, usages et interprétations des écrits séminaux de Jacques Bernoulli (1713) et de son neveu Nicolas Bernoulli (1709) dans les œuvres des statisticiens du XIX^{e} siècle était notre intention initiale à l'occasion du colloque d'octobre 2005 organisé par Norbert Meusnier. Il est évident en effet que dans la légende des fondations disciplinaires, J. Bernoulli est à la Statistique mathématique ce que Pascal est au calcul des probabilités : le père fondateur essentiel. Toutefois, évaluer et nuancer cette assertion suppose d'une part que l'on s'entende sur le périmètre de la discipline « statistique mathématique » pour une période que l'on pourrait appeler un XIX^{e} siècle long, et d'autre part que l'on définisse quelque corpus de textes qui permettent une objectivation des jugements que l'on portera sur la postérité des Bernoulli dans ce cadre.

[1] Université Paris IX, michel.armatte@dauphine.fr

Le périmètre de la Statistique mathématique

Que doit on entendre sous le nom de statistique pour un XIXème siècle qui irait en gros de la fin de l'ancien régime à la guerre de 1914-18 ? On sait que le périmètre de la discipline a fortement évolué sur cette période. D'abord classée comme science camérale soucieuse de dresser des états de la force des Etats, la Statistique dans sa version allemande et française pouvait s'assimiler à une sorte de géographie politique descriptive systématique. Cette approche a peu à peu laissé la place à une description numérique des populations et des échanges économiques qui, sous le nom d'arithmétique politique, se focalisa sur la recherches de relations invariantes entre certaines grandeurs : prix et quantités, naissances et population, attelages et surfaces cultivées,…. Vers le premier tiers du XIX^{è} siècle, les deux traditions se sont mélangées d'une part dans une statistique des bureaux qui cultiva science de l'Etat et quantification dans une « avalanche de nombres », d'autre part dans une statistique morale qui se saisit de régularités numériques pour fonder de nouvelles sciences sociales, dont le prototype fut la physique sociale de Quetelet.

Quid alors de la statistique mathématique ? Une première forme de celle-ci est le monument que constitue la *Théorie analytique* de Laplace dans ses 3 éditions de 1812, 1818, 1820, bien que le mot même de Statistique ne soit pas plus utilisé dans cette œuvre que dans sa version introductive, pédagogique et littéraire, que constitue *l'Essai philosophique sur les probabilités*. Une seconde version de la statistique mathématique résulte de la contestation du noyau même de la doxa laplacienne qu'est la loi normale, et du débat qui surgit à la fin du siècle entre les tenants d'un déterminisme social fondé sur ces régularités élevées au rang de lois, et ceux qui rejettent les bases de cette vision, à savoir le modèle des tirages répétés dans une urne de composition fixe. Car ce modèle probabiliste, qui permet un effacement des causes accidentelles par compensation et un renforcement des causes constantes, selon le vocabulaire de Condorcet, Laplace, Poisson et Quetelet, est le grand mécanisme producteur de ces régularités. Mais il est contesté aussi bien par ceux qui rejettent le calcul des probabilités que par ceux qui voudraient renouveler ce calcul en prenant en compte « la variabilité des chances » comme dit Cournot, soit encore un principe quelconque d'urne variable. Les travaux de Lexis et Bortkiewitz en Allemagne au tournant du siècle marquent la fin de l'hégémonie laplacienne et ouvrent l'ère d'une seconde statistique mathématique. Au même moment, les travaux de l'école biométrique anglaise – Pearson et Fisher plus particulièrement - puis des économistes Yule et Bowley mettent à jour les approches centrales pour la discipline que constituent la régression et la corrélation, ainsi que les premiers éléments de la théorie des sondages et des méthodes d'inférence et de jugement à partir d'un échantillon. On peut donc aussi bien parler de naissance (ou re-naissance ?) de la Statistique mathématique à l'occasion de l'École allemande de Lexis-et Bortkiewitz, qu'à l'occasion de l'Ecole biométrique anglaise de Pearson et Fisher. C'est cependant l'année 1933 que Stigler choisit symboliquement pour marquer la naissance de la statistique mathématique moderne[2] : A cause des *Fondements du calcul des probabilités* que Kolmogorov publie cette année là ? A cause du départ en retraite de Karl Pearson, au profit de son fils Egon et de Ronald Fisher ? A cause de l'émancipation des *Annals of Mathematical Statistics* vis-à-vis de l'American Statistical Association ? A cause de la critique ravageuse d'un ouvrage de la vieille école (Secrist) publiée cette même année par Hotelling dans les *Annals* qui dénonce un usage abusif de la notion de régression (une *regression fallacy*)? Tout cela à la fois marque aux yeux de Stigler le début d'un grand bouleversement, et d'une explosion des publications de ce champ

[2] Stigler, 1999, chap. 8 : « the history of statistics in 1933 » p.157: « I propose to advance and defend the claim that mathematical statistics began in 1933 »

de telle ampleur que le *Journal of the Royal Statistical Society* renonce à en publier les résumés.

Le corpus des traités

En voilà assez pour justifier que nous nous en tenions pour cette enquête à une période qui prend fin dans les années vingt. Une période de longue traversée du désert pour le calcul des probabilités dit on bien souvent[3]. Comment dans cette période juger de la postérité de *l'Ars Conjectandi* de Bernoulli ? Nous aurions pu travailler sur un corpus d'articles pris dans des revues mais celles-ci n'ont pratiquement pas d'existence avant la fin du XIXe siècle à l'exception du JRSS de Londres (1834) et du JSSP de Paris (1860)[4]. Les productions du Congrès international (1853-72) et de l'Institut International de Statistique (à partir de 1885) sont également tardifs et n'ont pas fait l'objet d'une indexation. Nous proposons donc d'interroger un corpus déjà sollicité dans de précédents travaux[5], celui des principaux traités de la discipline au cours de ce long XIX^{e} siècle. Comme nous l'avons affirmé dès 1991, un traité marque mieux qu'un article une volonté de synthèse des savoirs, de compromis sur différents points de vue, de convention qui tente de s'imposer à un moment à la communauté savante des statisticiens en l'occurrence. Contrairement à un article vecteur d'innovation d'une science en train de se faire, un traité se veut à chaque fois une vision cohérente, structurée, hiérarchisée, et quasi exhaustive d'un auteur qui cherche à reconstruire un socle de la discipline qu'il espère voir s'imposer comme un modèle de science normale. Le traité c'est de la science froide, institutionnalisée. On peut donc déceler dans ce corpus des tendances lourdes.

Il faut noter une certaine difficulté à discriminer les traités de statistique des traités de probabilité pour cette période. Sur les 57 ouvrages de la liste donnée dans l'Annexe 1, il n'y a qu'une dizaine de traités qui s'affichent comme traités de probabilité. Les autres sont des traités de statistique dans un sens qui a varié au cours du siècle. En fin de période, on peut trouver des traités de statistique sans référence à la probabilité, même tardivement (March, 1930, par exemple) et des traités de statistique mathématique dont la majeure partie se réfère au calcul des probabilités (Yule 1911, Rietz 1924…) ; ou encore des traité du calcul des probabilités et de ses applications (de Cournot à Carvallo). Nous avons choisi de ne pas discriminer a priori les ouvrages sur leur titre et de ratisser assez large.

Concrètement, notre corpus représente une cinquantaine d'ouvrages, publiés en France ou à l'étranger mais dans ce dernier cas suffisamment diffusés pour avoir été référencés dans les revues, et avoir trouvé place dans nos Bibliothèques. Bien que la notion de traité ait évolué en 120 ans, liée d'abord à une certaine circulation des savoirs dans la France Lettrée ou Académique de la fin du XVIII^{e}, liée ensuite à des enseignements à partir de la fin du XIX^{e}, elle possède une forme canonique assez homogène qui permet des comparaisons. Mais surtout, dernier avantage de ce corpus, c'est que nous l'avons « réduit en nombre » de deux façons : Tout d'abord nous avons indexé les 20 000 pages de 56 traités en fonction d'une typologie de 40 thèmes qui permet de savoir ce dont parle chaque page. Cette première étude, déjà publiée [Armatte, 2001], répond en quelque sorte à la question suivante : D*e quoi parlent ces traités ?* Dans une seconde étude sur 40 de ces traités[6] , nous avons repéré

[3] Le disent en tous cas ceux qui, aujourd'hui, ne voient rien d'intéressant entre l'École française de Laplace et la reconstruction axiomatique de la probabilité par Borel et l'École russe.

[4] Voir la thèse de Kang (1989)

[5] Voir Armatte 1991, 1995, 2001

[6] Les traités non analysés en terme de citations résultent le plus souvent d'auteurs qui ne citent quasiment personne. Il faut dire à leur décharge que ce n'est pas tant par péché d'orgueil que par intégration d'autres

systématiquement toutes les citations explicites d'autres auteurs, pour répondre en quelque sorte à une autre question : *De qui parle-t-on* ? A qui se réfère–t-on pour parler de ces sujets ? Cette seconde approche a conduit au tableau croisé très « allongé » du nombre de fois où chacun des 40 citeurs a cité l'un des 150 cités retenus dans une procédure qui a éliminé les plus exotiques. Malgré la faible taille de l'échantillon des traités passés à cette fastidieuse moulinette, ce tableau s'avère d'une grande utilité pour l'historien qui peut y retrouver les moyens d'objectiver les idées plus ou moins nettes qu'il a du jeu des influences de tel auteur sur tel autre. Et comme toujours, les cases vides du tableau sont les plus parlantes[7].

Une vision d'ensemble sur Bernoulli dans les traités

Quid des Bernoulli dans cette affaire ? Que nous apprend la colonne des citeurs de l'œuvre bernoullienne. Reconnaissons d'abord que de la famille si vaste et prestigieuse des Bernoulli, seul Jacques tire son épingle de ce petit jeu. La thèse de Nicolas semble fort peu connue des statisticiens. Et même des économistes-statisticiens. Daniel par contre est cité plusieurs fois par Laplace, Bertrand, Keynes, Davis. Sans doute pour sa solution de l'utilité espérée au paradoxe de Saint-Pétersbourg, si dévastateur de la règle de l'espérance mathématique comme parti à prendre le plus sage. C'est un classique des traités.

Au jeu tellement à la mode des palmarès, Grand Jacques ne joue pas dans la même cour d'école : il est parmi les grands puisqu'il cumule 151 des 5200 citations et 16 des 40 citeurs ce qui le place respectivement au 5ème rang pour les citations (derrière Pearson (K), Yule, Bowley, et Quetelet) et 6ème rang pour les citeurs (derrière Quetelet le grand champion, puis Yule, Pearson, Galton et Bowley). Certes ce palmarès traduit peut-être un biais de notre fichier qui comporte un grand nombre de traités de statistique économique très influencés à la fois par les pionniers de la discipline, auteurs de traités spécifiques (Bowley et Yule), et par le père de la statistique mathématique version école biométrique qui leur a fourni les principaux outils (variance, loi normale, régression, corrélation). Mais la performance n'en est que plus remarquable : pourquoi cet ancêtre se taille-t-il encore la part du lion face à des pointures qui ont l'avantage d'être des contemporains des auteurs citeurs. Pourquoi la Statistique mathématique « moderne » se réfère-t-elle davantage par exemple à Jacques Bernoulli qu'à Laplace, Gauss, Bienaymé et Poisson qui sont à la fois plus proches de nos auteurs (dans le temps) et évidemment plus avancés dans le traitement analytique que l'auteur de l'*Ars Conjectandi* ? Pour répondre à ces questions il faut évidemment y aller voir de plus près.

Qui porte ainsi la figure du fondateur en si haute place ? Ce ne sont pas les auteurs du courant de la Statistique administrative. Bertillon, Turquan et Block s'intéressent aux procédures d'investigation, à la colligation des faits, à leur classement, leur mise en équivalence ou en série ordonnée, aux opérations du recensement de population, aux nomenclatures, à la mise en tableaux des chiffres, et à l'extrême rigueur si la Faculté et l'Académie les y autorise, à quelques opérations inférentielles visant à tirer de ces mètres carrés de tableaux[8] des régularités, des lois comme le bon Quetelet les y engage. Mais la probabilité ne trouve aucune grâce à leurs yeux. Aucun d'eux ne cite le grand Jacques.

---

normes de l'écriture scientifique. Pour beaucoup, l'absence d'index des auteurs a nécessité sa reconstitution complète, une tâche manuelle assez lourde.

[7] Voir un extrait de ce tableau dans notre annexe 1. Nous n'avons retenu que les 15 premières colonnes du tableau, les suivantes étant de plus en plus vides.

[8] 775 m² produits chaque année par la SGF selon Moreau de Jonnès, et qui forment alors le modèle réduit de 550 000 km² de la France.

Même résultat d'ailleurs pour les tenants de la Statistique économique – Yule, Bowley, Davies, Huber, Jerome, Julin, March) qui s'en tiennent aux résultats apportés sous leurs yeux par Quetelet, Edgeworth, et Pearson. Dans les manuels classiques de Yule et Bowley, le modèle binomial tient une place très importante, le modèle de l'urne (qui ne s'appelle pas encore « de Bernoulli ») étant fondamental dans un exposé de la loi normale qui en dérive par approximation, ou dans un exposé de la toute récente théorie des sondages. Mais ni Bowley ni Yule, que ce soit dans les premières éditions (resp. 1902, 1911) ou les suivantes, jusques et y compris la 14ème édition Yule et Kendal de 1937, ne font référence explicitement au théorème de Bernoulli. Faisons une exception pour l'excellent traité de Julin(1921) qui cite Bernoulli 10 fois pour son théorème, et qui en donne une synthèse correcte à partir des éléments de Borel (1909) pour la démonstration, et du traité de Carvallo (1912) pour l'illustration par le sex-ratio à la naissance. Deux explications peuvent être avancées sur le désintérêt pour le théorème lui-même. 1°) « La démonstration est très lourde et compliquée. Le statisticien n'a qu'à se référer aux traités de probabilités » dit Julin. 2°) Dans le cas de Julin ou March, la convergence de la loi des grands nombres ne les intéresse pas forcément. Le vocabulaire même de « loi des grands nombres » que l'on doit à Poisson même si son usage rhétorique peut être attribué principalement à Condorcet n'est pas dans la tradition Pearsonienne dont ils s'inspirent. Chez Pearson, les échantillons sont toujours déjà très grands, et il n'y a pas à proprement parler de distinction formelle entre fréquence d'échantillon et probabilité. Ce dernier concept n'est pas au centre de sa reconstruction des statistiques mathématiques. Il y place une autre notion, celle de contingence que la Grammaire de la Science constitue comme essentielle, philosophiquement et pratiquement.

Avons-nous raison d'assimiler citation de J. Bernoulli et référence à son théorème ? Du point de vue de l'auteur référé, cela est d'autant moins sûr que ce théorème ne constitue qu'un des sujets de la IVème partie de l'Ars Conjectandi (AC). Rappelons que les trois autres parties de l'ouvrage jouent un rôle important dans l'histoire du calcul des probabilités (cf Meusnier…) mais sont malheureusement très mal connues des statisticiens des XIXe et XXe. Ils ont une excuse : La première qui reprend elle-même le traité de Huygens sur les probabilités totales et composées, la seconde partie qui est un exposé de la doctrine des combinaisons et permutations, et la troisième qui mobilise cette doctrine pour l'analyse des tirages au sort et des jeux de hasard n'ont plus d'intérêt qu'historique après les exposés didactiques de Laplace (1825), Lacroix (1822 et 1833), Quetelet (1828), et Cournot (1843).

La 4ème partie, inachevée, consacrée à l'application de ce calcul aux affaires civiles morales et politiques. sur la philosophie des probabilités et de la décision, sur déterminisme et contingence… est seule l'objet de quelques références, de temps en temps pour sa définition des catégories philosophiques de la nécessité et de la contingence, de la certitude, et de la probabilité, beaucoup plus rarement pour son calcul si original du poids des arguments – « la force de ce qui prouve » - et d'une logique du probable qui en résulte, laquelle n'est guère reprise que par les logiciens anglais (Boole, Venn) et surtout par Keynes dans son traité de 1921[9]. En dehors de ces cas très marginaux, c'est bien le théorème de Bernoulli de la 4ème partie de l'AC - la future « loi faible des grands nombres » - qui est l'objet de citations quasi systématiques.

Voici, pour en finir avec la statistique des traités de statistique les auteurs principaux du XIXe qui s'y réfèrent encore de façon importante. Mais le tableau statistique est un froid constat. C'est une sorte de photo aérienne qui donne la structure du paysage. Descendons dans le cœur des traités et voyons maintenant ce qu'ils font vraiment du texte bernoullien, du

[9] Keynes cite explicitement Bernoulli 17 fois (en fréquence, juste après Laplace et Czuber)

moins pour quelques uns d'entre eux – Lacroix, Cournot, Quetelet, Bertrand, Carvallo - en s'attachant plus longuement au dernier:

Auteur	Date	Citations J.Bernoulli	Nombre Total de citations	%
Laplace	1825	4	31	13%
Lacroix	1816	15	193	8%
Cournot	1843	8	88	11%
Quetelet	1846	4	36	11%
Bertrand	1889	18	139	13%
Laurent	1908	3	23	13%
Carvallo	1912	50	155	32%
Keynes	1921	17	275	6%
Rietz	1924	6	83	7%
Jordan	1927	12	98	12%
Galvani	1935	6	65	9%

Sylvestre François Lacroix : *Traité élémentaire du calcul des probabilités*, 1816

Lacroix est celui par qui la pensée de Condorcet d'abord, celle de Laplace ensuite se sont transmises à des gens qui n'iront jamais lire *l'Essai* ou les *Éléments* ou les nombreux manuscrits de Condorcet et moins encore la *Théorie analytique* cet inaccessible Mont-Blanc du calcul des probabilités. Lacroix a sans doute lu *l'Ars Conjectandi* directement puisqu'il ne se contente pas du théorème et fait par exemple une allusion (p.7) à la « distinction nécessaire de la force des indices et de leur nombre » un thème majeur de Jacques Bernoulli. Voici sa vision « d'une proposition de la plus haute importance, démontrée pour la première fois par Jacques Bernoulli : *On peut toujours assigner un nombre d'épreuves tel qu'il donne une probabilité aussi approchante de la certitude qu'on le voudra, que le rapport du nombre de répétitions du même événement à celui des épreuves ne s'écartera pas de la probabilité simple de cet événement, au-delà des limites données, quelque resserrées qu'on suppose ces limites. »* Ce n'est pas une copie de Bernoulli mais une synthèse de son programme, qui est précisément cité quelques lignes plus loin : « *Chercher si, en augmentant sans cesse le nombre des observations, on faisait croître la probabilité d'obtenir le vrai rapport entre le nombre de cas dans lesquels un événement peut arriver et le nombre des cas contraires, en sorte que cette probabilité surpassât un degré de certitude donné* [10] » et de l'énoncé de sa solution : «*il s'ensuit alors que l'on peut prendre des observations en un nombre tel que la somme des cas pour lesquels il arrive que le nombre d'observations fertiles soit au nombre de toutes dans un rapport qui ne sort pas des limites (r+1)/t et (r-1)/t et l'emporte sur la somme des cas restants d'un nombre de fois supérieur à c (c'est-à-dire avec une probabilité c fois supérieure). Ce qu'il fallait démontrer* [11]». Lacroix nous dit que « *Bernoulli retint pendant*

[10] Traduction de Lacroix qui ajoute en note : « l'expression degré de certitude, reçue dans le langage ordinaire, ne me paraît pas très exacte ; mais Bernoulli s'en est servi comme équivalant à la probabilité qui, étant une fraction, tandis que l'unité représente la certitude, est pour ainsi dire une portion de celle-ci »

[11] J. Bernoulli, 1713, traduction N. Meusnier

vingt ans dans son porte-feuille la solution de ce problème qu'il regardait comme le plus difficile et le plus important de ceux qu'on pouvait se proposer sur cette matière ». Puis il se propose de démontrer cette proposition *« en suivant de près la démarche qu'a tenue J.Bernoulli »* mais ce qui est bien plus important pour lui est l'interprétation de ce théorème : « *Jacques Bernoulli conçut le premier la possibilité de faire servir de manière incontestable l'observation des événements passés à la détermination des événements futurs (…) Bernoulli avait pour but, comme le montre l'énoncé ci-dessus, d'arriver à connaître la probabilité des faits d'après les observations seulement, c'est-à-dire a posteriori, afin d'appuyer sur l'autorité du calcul les inductions qu'on peut tirer de la répétition des phénomènes. A la vérité, il confondait, ainsi qu'on le verra dans la seconde section de ce traité, la manière d'évaluer les probabilité a posteriori avec leur détermination a priori, ou par la connaissance des combinaisons*…[Lacroix, 1816, p. 59-60] » On voit que se trouve ici posée la question dite de l'inversion du théorème de Bernoulli dans ses deux formes 1°) d'un encadrement de l'écart entre la probabilité d'un événement et sa fréquence relative pour un nombre donné de répétitions, qui résulte directement le théorème de Bernoulli 2°) du calcul bayesien d'une probabilité a posteriori auquel Lacroix fait allusion, et qui résulte de la révision d'une probabilité a priori après de nouvelles observations. On sait que ces deux approches ne se rejoignent qu'asymptotiquement.

Lacroix s'intéresse surtout à la première forme d'inversion du théorème de Bernoulli et à son interprétation par Condorcet. Soutenant en effet que *« cet ouvrage posthume [Ars Conjectandi] contient déjà les principaux fondements de la philosophie du calcul des probabilités, mais qu'elle y est demeurée presqu'ensevelie jusqu'à ce que Condorcet l'ait rappelée, perfectionnée et étendue* [note, p.59]», Lacroix présente la façon dont Condorcet a « réduit cette théorie » - je dirais plutôt « prolongé » - en 3 propositions (que l'on trouve effectivement dans les *Elements,* p.81 et suivantes) :

« 1°) Si la probabilité d'un événement surpasse ½, il y a lieu de croire que cet événement arrivera, plutôt que de croire qu'elle n'arrivera pas

2°) Plus cette probabilité augmente, plus le motif de croire augmente

3°) Il croît proportionnellement à cette probabilité »

La première ressemble à une tautologie sauf à bien lire qu'on parle de futurs contingents. Alors, si la probabilité de l'événement dépasse légèrement ½, il existera toujours un nombre d'observation tel que l'on ait une quasi certitude que la fréquence de cet événement dépassera la fréquence de l'événement contraire. La seconde résulte aussi du théorème et toutes deux fondent la théorie du « motif de croire » chez Condorcet, à savoir que dans les sciences d'observation – sciences de l'homme ou sciences naturelles - la multiplication des épreuves peut nous amener pratiquement au même degré de certitude que les sciences déductives, pourvu que l'on puisse répéter ces observations un très grand nombre de fois. Lacroix avait déjà observé que « *C'est le sentiment de la constance des lois de la nature qui fonde notre confiance dans le retour des événements observés* ». Non seulement le théorème de Bernoulli le prouve, mail il établit une règle d'inférence et de prévision très sûre qui fonde l'art de la conjecture. Une règle qui est aussi une règle de sagesse puisque, de là, écrit Lacroix, vient aussi « *qu'il est contre la prudence de s'exposer sans nécessité aux chances d'un hasard qu'on ne peut tenter un très grand nombre de fois*. »

Adolphe Quetelet : *Lettres à SAR sur le Calcul des probabilités,* 1846.

« L'homme naît, se développe et meurt d'après certaines lois. ». C'est la première phrase de Quetelet [1835] « Sur l'homme et le développement de ses facultés ou Essai de physique sociale ». Ces lois, Quetelet les a établies principalement à partir de régularités observées sur les statistiques disponibles, en mobilisant des raisonnements fondés sur le calcul des probabilités. On peut même affirmer qu'après des années où géomètres et administrateurs se sont entendus pour ne jamais franchir la frontière entre la statistique descriptive livrée aux seconds et l'inférence statistique réservée aux géomètres académiciens sachant manier la probabilité, il est le premier à reconstruire une unité entre statistique et art de la conjecture dans une tradition bernoullienne. Il a pour ce faire mobilisé et enseigné le calcul des probabilités de façon très pédagogique, et produit deux manuels importants. Une première fois avec les *Instructions* de 1828 qui se présentent comme un Reader Digest du traité de Lacroix auquel il emprunte (sans le dire) de longs passages. Ses « Lettres sur le calcul des probabilité » de 1846 sont plus originales. La place qu'y prend la référence à Bernoulli est importante, sans être omniprésente. Mais surtout on reconnaîtra à travers les quelques citations qui suivent un véritable travail de vulgarisation, qui n'est pas sans danger de simplification abusive, voire parfois, de trahison. Mais traduire c'est toujours trahir un peu.

[Lettre IX] *« J.B a fait voir qu'en multipliant convenablement le nombre des épreuves, on peut atteindre à une probabilité aussi voisine de la certitude que l'on voudra, que la différence entre les résultats du calcul et ceux de l'expérience sera resserrée dans des limites aussi étroites qu'on voudra »*

« C'est un principe très simple et très utile que la précision des résultats croit comme la racine carrée du nombre des observations »

« J'ai été curieux de soumettre ce principe à l'expérience, et j'ai fait jeter dans une urne vingt boules blanches et un égal nombre de boules noires, de sorte que la probabilité était la même, et égale à ½ , pour prendre soit une boule blanche, soit une boule noire. Il semblait donc qu'après un certain nombre de tirages, le nombre de boules blanches sorties dût être égal au nombre de boules noires ; ce n'est cependant pas ce qui est arrivé, comme votre Altesse pourra le voir dans le tableau suivant, qui indique les résultats successivement obtenus après 4, 16, 64, 256, 1024 et 4096 tirages… »

Où l'on voit donc que Quetelet ne formule pas précisément la loi faible des grands nombres, ne démontre pas le théorème de Bernoulli, et préfère s'appuyer sur une simple expérience de tirage avec remise dans une urne, de toute évidence fictive. « *Je pourrais, dit-il, pour me justifier, m'appuyer d'une autorité imposante, de celle de l'illustre Buffon qui, dans son Essai d'arithmétique morale, cite des épreuves semblables qu'il a fait faire par un enfant.* » Cette expérience cependant ne peut pas même constituer une mise en évidence, ou une vérification de la loi des grands nombres parce qu'à un nombre donné de tirages n'est associé qu'une seule expérience. Or sans multiplication des échantillons de même taille, il est impossible de montrer que la probabilité de tomber dans un certain intervalle s'accroît avec cette taille. Donc pour ce qui est d'une pédagogie de la loi de Bernoulli, notre verdict sera : Peut mieux faire ! Et d'ailleurs il fait beaucoup mieux dans la Lettre XX pour établir l'analogie probabiliste du gladiateur, qui lui permet de projeter les éléments de la théorie des erreurs – les mesures se distribuent selon une loi « normale » et leur moyenne est « le lieu vrai » de la grandeur mesurée - dans le domaine des sciences de l'homme. Toute moyenne empirique d'une grandeur humaine y devenait une caractéristique de « l'homme moyen ». Ceci constituait disait-il « la première preuve mathématique qu'il existe vraiment un homme moyen. [Lettre XXX] »   .

Bernoulli est convoqué une dernière fois dans la Lettre XXX pour une interprétation de son théorème de convergence d'une façon qui fera fureur tout au long du demi siècle suivant : « *Cet habile géomètre avait employé une partie de sa vie à démontrer ce résultat qui nous paraît si simple aujourd'hui, à savoir : Que la moyenne donnée par une série* *d'expérience tombe près du nombre cherché, dans des limites d'autant plus étroites que les épreuves ont été plus multipliées (...) Mais Bernoulli a établi ses calculs dans l'hypothèse que le nombre cherché était fixe et constant. Il peut arriver que cette quantité éprouve de petites variations (...) Or le principe de Bernoulli est encore applicable dans ce cas, et c'est ce qui a été démontré par M. Poisson au moyen d'une savante analyse (...) Dans ce cas, les expériences doivent en général être très multipliées : c'est par ce motif que M. Poisson a nommé la loi des grands nombres l'extension du principe de Bernoulli.* » Dès lors la répétition des épreuves dont on observe les résultats en statistique fonctionne comme un filtre qui « détruit tous les effets des causes accidentelles » et met à jour les effets des seules « causes constantes » des phénomènes. On sait que cette interprétation n'est pas propre à Quetelet, et qu'elle est déjà mise en avant par Laplace et Poisson. Mais Quetelet fait de cette recherche des causes et de leur filtrage par la moyenne sur un grand nombre de cas le principe de sa « physique sociale ». Ayant par exemple éliminé les causes accidentelles et les causes périodiques en considérant les nombres de morts-nés et leur rapport au total des naissances, Quetelet établit la régularité de ce ratio en Belgique, mais aussi les causes variables qui le font changer considérablement dans certaines populations : il est plus fort pour les garçons (de l'ordre de 1,4 fois) que pour les filles, à la ville qu'à la campagne (1/16 contre 1/29 environ), et pour les naissances illégitimes que pour les légitimes (1/16 contre 1/25 environ) « On n'en saurais malheureusement douter, l'immoralité et la misère sont les causes destructives qui frappent l'homme avant même qu'il ait pu voir le jour » conclut-il. Quetelet est le dernier des grands Bernoulliens du siècle.

Augustin Cournot :*Exposition sur la théories des chances*, 1843

On sait que *l'Exposition* de Cournot (1843) est quasiment le seul ouvrage à éclairer ce long tunnel qui sépare les deux Ecoles françaises de la probabilité de Laplace et Borel. Cournot apporte un certain nombre d'éléments non négligeables à la réflexion autour de la répétition des événements. Sur le théorème de Bernoulli qu'il énonce très simplement et qu'il démontre par l'approximation de Stirling, il n'apporte guère qu'un commentaire philosophique, mais il est important : la probabilité dont il est question dans ce théorème est une probabilité mathématique, *objective*, c'est-à-dire un rapport des chances favorables et totales qui est la mesure d'une *possibilité* physique, « un rapport qui subsiste entre les choses mêmes, et qui ne tient pas à notre manière de juger ou de sentir (p.59)», qu'il convient donc de distinguer de la *probabilité subjective*, « relatives en partie à notre connaissance, en partie à notre ignorance ». « *Jacques Bernoulli, dans l'Ars conjectandi, déterminait formellement le but essentiel, la valeur objective de la théorie des hasards ; mais en même temps, par l'emploi continuel des termes de probabilité, de conjecture, etc., <u>il préparait les équivoques</u> qui en ont rendu l'exposition confuse et les applications incertaines. Le titre de l'ouvrage de Moivre* (Doctrine of chances) *n'avait point cet inconvénient* (N°47, p. 63)[12].

Le second apport majeur de Cournot au théorème de Bernoulli est la relativisation qu'il apporte au schéma de l'urne de composition constante, à travers sa théorie de la variabilité des chances exposée au chapitre 7. Ici sont explorés différents modèles d'urne de composition variable : le modèle de Poisson dans lequel l'urne est tirée au hasard et qui lui avait permis de s'approprier une « loi des grands nombres » plus générale que celle de Bernoulli ; le modèle de…Cournot dans lequel la suite des urnes de compositions différentes est le résultat de causes non fortuites ; le modèle de Bienaymé dans lequel l'urne est tirée au hasard pour chaque suite de m_i tirages. C'est par ces différents modèles que le scandale est

[12] Cournot fait remarquer cependant que le mot « chances » a l'inconvénient de se confondre avec celui de « cas » pour indiquer une combinaison fortuite, et non pas un rapport.

arrivé à la fin du siècle quand les statisticiens allemands emmenés par Lexis et Bortkiewitz ont rejeté la statistique Laplacienne, dont le modèle binomial-normal ne rendait pas compte de la distribution des principaux phénomènes sociaux.

La distinction établie par Cournot entre possibilité physique ou objective, et probabilité subjective n'autorise pas seulement une interprétation ou une autre du calcul de probabilité, elle rend inique, erronés certains calculs. Quand par exemple dans une situation du type précédent Cournot discute de la règle de Bayes (chap. 8) qui permet d'évaluer a posteriori la probabilité de l'urne dont provient la boule tirée, il distingue le cas où les probabilités a priori des urnes sont objectives parce que fixées par le processus (on a tiré une des urnes au hasard) du cas dans lequel c'est l'ignorance qui nous fait attribuer a priori des probabilités égales à chaque urne, mais celles-ci n'ont qu'une valeur subjective de pari. Cette analyse fonde chez Cournot la méfiance qu'il faut accorder aux applications d'un tel calcul aux décisions judiciaires et aux témoignages, domaines pour lesquels « on est tombé dans les aberrations peu dignes de géomètres éminents ... « *Si,* [dans les modèles d'urnes variables], *les conditions du triage* [choix de l'urne] *changent d'une épreuve à l'autre suivant une loi inconnue, il n'y a rien à conclure des événements observés aux événements futurs. Condorcet a donné pour ce cas, et discuté longuement des formules tout à fait illusoires*. [p.113]»

Une dernière intervention forte de Cournot concerne les applications statistiques du modèle binomial dont le rapport avec le théorème de Bernoulli est plus lâche. Il s'agit des comparaisons de fréquences que l'on peut faire au sujet d'une même éventualité A, dans deux sous populations complémentaires, afin de juger si A y a la même probabilité ou non, bref si les urnes des deux populations sont identiques ou non. Ce test de comparaison de proportions qui ne dit pas encore son nom mobilise la loi de leur différence, et les limites entre lesquelles cette différence doit se trouver avec une forte probabilité si les sous populations sont identiques. Mais Cournot fait alors remarquer (chap. 9 , p. 129 et suiv.) que « *rien ne limite le nombre des faces sous lesquelles on peut considérer les événements naturels ou les faits sociaux* », ou en d'autres termes que nous pouvons (par data mining dirions nous aujourd'hui) multiplier à l'infini le nombre de coupes à explorer, le nombre de bipartitions que l'on peut faire dans une population (hommes/femmes, villes/campagnes, jeunes/vieux, actifs/inactifs…) et « *il sera alors a priori de plus en plus probable que, par le seul fait du hasard, l'une des coupes au moins offrira, pour le rapport envisagé, dans les deux catégories opposées, des valeurs sensiblement [significativement] différentes* » qui amèneront à conclure que cet écart n'est pas dû au hasard. Comme le caractère qui a servi de base à la bipartition est tout a fait arbitraire - il résulte soit d'une exploration systématique soit d'un intérêt qui s'est dirigé a priori sur cette coupe et qui a tous les caractères de la subjectivité - et pas d'un tirage au hasard, la probabilité qui fonde notre jugement n'a pas de valeur objective. Si les chances ne varient pas dans le temps (ou dans l'espace choisi), alors « le Principe de Bernoulli, auquel il faut toujours revenir en définitive, comme seule base solide de toutes les applications de la théorie des probabilités, suffit au statisticien »

Les critiques de Cournot sont assez fortes pour déstabiliser les fondements probabilistes de la statistique mathématique. Mais Joseph Bertrand lui portera le coup de grâce.

Joseph Bertrand : *Calcul des probabilités,* 1889

Un enfant prodige, plus jeune docteur de France, polytechnicien et agrégé de mathématique, titulaire de la chaire de physique et mathématique au Collège de France, membre puis Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences enseigne le calcul des probabilités et publie ce traité. L'hommage au fondateur de la statistique mathématique, dans un style inimitable, ne manque pas d'arriver dans les premières pages de la longue préface à l'ouvrage:

« *Revenons au théorème de Bernoulli. S'il pleut sur la place du Carrousel, tous les pavés seront également mouillés. Sous une forme simplifiée mais sans rien en retrancher, c'est là le théorème de Bernoulli (...) Telle est la puissance des grands nombres. Le hasard a ses caprices. Jamais on ne lui vit d'habitudes. Si 1000 gouttes tombent sur 1000 pavés, chaque pavé n'aura pas la sienne. Mais s'il en tombe 1000 millions, chaque pavé recevra son million ou peu s'en faudra*. »

Jusque là tout va bien. Mais l'humour devient vite grinçant et son traité n'est ni plus ni moins qu'une entreprise de démolition de la statistique laplacienne, et plus encore de celle de Condorcet. « *C'est avec une grande défiance qu'il faut, sur les traces de Condorcet, éclairer les Sciences morales et politiques par le flambeau de l'algèbre (...) Les motifs de croire que sur 10 millions de boules blanches mêlées à une noire, ce ne sera pas la noire que je tirerai du premier coup est de même nature, a écrit Condorcet, que le motif de croire que le Soleil ne manquera pas de se lever demain matin. L'assimilation n'est pas permise : l'une des probabilités est objective, l'autre subjective.* » C'est la même critique que Cournot.

Peut-on prendre la règle de Bernoulli comme fondement de l'action en s'appuyant sur les quasi-certitudes qu'elle peut procurer : « *La certitude des lois de Bernoulli est celle d'un chasseur très adroit qui, connaissant son arme, est certain d'abattre une bête féroce à dix pas. La bête se présente, il la manque ; en la voyant, furieuse, se ruer et l'assaillir, doit-il rester impassible, confiant dans la certitude de l'avoir tuée ?* »

Muni d'un test très simple – dans une loi binomiale liée à une urne fixe, le rapport de la moyenne des carrés au carré de la moyenne de la valeur absolue est égal à $\pi/2$ – Bertrand traque les fausses urnes constantes, et se régale de les voir toutes tomber…

Bertrand consacre entièrement le chapitre IV au théorème de J. Bernoulli. En fait il s'agit pour lui d'établir l'approximation d'une probabilité binomiale par la loi normale en passant par la formule de Stirling. Rien de très original, si ce n'est encore les importantes réserves qu'il fait sur la condition même de l'application du théorème (plus exactement de l'approximation précédente) : « *la probabilité ne doit pas changer pendant les épreuves et elle doit avoir une valeur déterminée. Un événement incertain n'a-t-il pas toujours une probabilité déterminée connue ou inconnue ? Il faut se garder de le croire. Quelle est la probabilité qu'il pleuve demain ? Elle n'existe pas. Non pas parce qu'elle varie d'un jour à l'autre avec l'état du ciel et la direction des vents ; mais parce que dans aucune circonstance elle n'a de valeur objective, la même pour tous ceux qui l'évaluent sans se tromper.* »

Il propose ce qu'il appelle trois démonstrations du théorème de Bernoulli, qui, à y regarder de plus près, ne concernent plus maintenant l'écart entre fréquence et probabilité d'un événement, mais l'écart entre la moyenne de n observations et la valeur espéré (qu'il appelle probable) d'une variable quantitative. Il montre alors que l'espérance du carré de cet écart tend vers 0 quand n tend vers l'infini, ou bien encore, plus simplement, que l'espérance de la valeur absolue de cet écart diminue plus vite que n. C'est un petit pas entre les résultats originaux de Fourier établis dans les deux mémoires *Sur les résultats moyens déduits d'un grand nombre d'observations*, publiés en 1826 et 1829 dans les *Recherches statistiques sur la ville de Paris* par le préfet Chabrol, et la démonstration de Khinchine (1929) de la loi des grands nombres pour une suite de variables indépendantes de même distribution qui ne sont pas forcément Bernoulliennes.

Emmanuel Carvallo (1912)

Emmanuel Carvallo est répétiteur de physique puis directeur des études à l'Ecole polytechnique. Il a rédigé des cours de statique, de mécanique, d'électricité avant ce traité de Calcul des probabilités qu'il publie en 1912. Il veut répondre à la fois à un prix proposé par l'Académie royale des sciences de Madrid pour un « exposé clair et simple du calcul des probabilités », et à un besoin de support pour le recrutement de statisticiens à la SGF. Pendant plusieurs décennies, les candidats ont eu l'ouvrage de Cournot comme seule référence. Or , « malgré ses admirables qualités d'exposition, cet ouvrage est encore incompréhensible pour les personnes qui ne sont pas spécialement versées dans les mathématiques ». C'est ainsi que le problème posé par Lucien March au recrutement de 1907 ne fut correctement traité que par les polytechniciens. Quant aux « *ouvrages de géomètres habiles tels que Joseph Bertrand. Heureusement, si leur séduction est grande pour les mathématiciens, leur inutilité est certaine pour la plupart des travailleurs* ». Carvallo est un adepte de l'enseignement par l'exemple, et se dit prêt à relever le défi de l'Académie de Madrid en s'attachant davantage à faire comprendre qu'à démontrer. Ce qui n'empêche pas des innovations qui tournent pour l'essentiel autour de deux thèmes : le théorème de Bernoulli qui se voit dépoussiéré et réduit en abaques ; une étude de cas approfondie sur la masculinité dans les naissances humaines qui illustre les usages du théorème.

On ne peut, dit-il, aborder la méthode statistique sans le théorème de Bernoulli qui en est le fondement. Comment s'y prend il pour en faire un exposé simple ? Ayant défini l'égale possibilité des événements (un point douteux reconnaît-il) puis la probabilité d'un événement comme rapport des cas favorables aux cas également possibles, il opère une distinction entre la loi du hasard et le théorème de Bernoulli. On s'attendrait à ce qu'il attribue la loi binomiale à de Newton et de Moivre, et le théorème de convergence des fréquences vers la probabilité à Bernoulli, mais il fait juste l'inverse. Dans une section consacrée à « la portée du théorème de Bernoulli et la portée de la loi du hasard » (p. 10-11), il s'efforce d'en séparer les significations. La *loi du hasard* a été définie ainsi (p.6): « Dans une série d'épreuves répétées en grand nombre, chacun des événements possibles offre une fréquence [variable d'une série à l'autre] qui est sensiblement égale à sa probabilité [fixe]». « C'est grâce à la loi du hasard, admise comme un postulat, qu'on peut prévoir approximativement les fréquences d'après les probabilités calculées » nous dit-il. Selon lui, « *le théorème [de Bernoulli] ne démontre pas la loi du hasard. En effet il n'atteint pas les fréquences des événements auxquels donnent lieu les épreuves longuement répétées, mais il vise seulement les probabilités de ces événements. C'est grâce à la loi du hasard, admise comme postulat qu'on peut prévoir approximativement les fréquences d'après les probabilités calculées (...) Le Théorème ne saurait montrer la loi du hasard parce que cette loi est le postulat même de la théorie, mais il précise les probabilités des divers événements possibles, car il résulte d'une énumération positive. En outre il est surprenant et jette une clarté nouvelle sur la loi du hasard elle-même. Le théorème fait comprendre la raison de la loi* »

Curieuse interprétation dans laquelle la loi du hasard est un postulat et le théorème de Bernoulli une simple énumération. Dès lors qu'apporte ce théorème ?

Le concept majeur chez Carvallo est la notion d'écart [aléatoire] entre la probabilité de l'événement poursuivi et sa fréquence dans une série d'observation. Dès lors le théorème de Bernoulli consiste en une formule – qu'il se refuse à écrire – mais qui a été traduite en une Table permettant à n'importe qui de connaître la loi de probabilité des écarts. L'innovation principale est là : Le Théorème de Bernoulli, n'est rien d'autre que cette Table, en fait celle de l'intégrale de la densité normale qu'il emprunte au recueil de tables de Houël (Gauthier-Villars 1901), et qui « représente la loi générale des probabilité des écarts des longues séries ». « L'avantage du théorème de Bernoulli est vraiment merveilleux : Une seule Table numérique contient la réponse à n'importe quel problème pratique, pourvu que les épreuves du hasard soient nombreuses ».

Le théorème est désacralisé et instrumentalisé : *La découverte de Bernoulli comprend l'ensemble des choses que je viens de dire, savoir : la solution générale de tous les problèmes de même type que celui de l'énoncé ; la formule qui constitue la solution générale dans sa forme la plus condensée; les conséquences multiples de la formule ; la Table numérique qui peut la remplacer. Suivant le point de vue spécial où l'on envisage la découverte de Bernoulli, on lui donne des noms divers : Théorème de Bernoulli ; formule de Bernoulli ; loi des probabilités des écarts; tables des probabilité des écarts ; loi des grands nombres* »

La démonstration du théorème est seulement esquissée, avec l'introduction des combinaisons et de la formue de Stirling, à partir d'un exemple de 100 épreuves de pile ou face : la probabilité d'un écart absolu inférieur ou égal à l'unité (1% des épreuves), se calcule facilement comme la probabilité de réussir 49, 50 ou 51 fois. Elle vaut $0{,}21\sqrt{(2/\pi)}$. La probabilité d'un écart de 1/1000^{e} sur 10 000 tirages est la probabilité de réussir un nombre de fois compris entre 4990 et 5010. Elle vaut $0{,}201\sqrt{(2/\pi)}$. Carvallo montre alors facilement que « des séries de 100 en 100 fois plus longues offrent à peu près la même probabilité pour des écarts de 10 en 10 fois plus faibles », une probabilité légèrement décroissante qui a pour limite $0{,}2\sqrt{(2/\pi)}$. Il fournit alors la table et l'abaque entre écarts relatifs (1,2,3..millièmes) et probabilités pour 10 000 tirages et il généralise la règle précédente qui permet de l'utiliser pour n'importe quel nombre de tirages : c'est la règle de la racine de n. Une seule abaque permet d'obtenir la probabilité que l'écart soit inférieur à « l'écart étalon », à savoir l'écart-type de la fréquence à un facteur $\sqrt{2}$ près :

Si $e = \sqrt{\dfrac{2p(1-p)}{n}}$ la probabilité d'un écart inférieur à x est la fonction de répartition au point x/e donnée par l'abaque.

Voici donc le théorème de Bernoulli ramené à sa plus simple expression : une table et une abaque de calcul de « la loi normale centrée et réduite » comme on l'expliquera ensuite, après guerre, à tous les étudiants. En attendant c'est une approche d'ingénieurs, habitués à transmettre des ordres de calcul par le biais d'abaques, dans des domaines aussi variés que l'artillerie, la résistance des matériaux, ou les horaires de chemins de fer[13]. Avec Carvallo, on voit naître sous nos yeux l'usage pratique de la loi normale qui va s'imposer en même temps dans la formation des ingénieurs et sur les chantiers ou les laboratoires.

La Table donne le calcul. Le calcul donne la raison de la loi fondamentale du hasard : les fréquences absolues sont à peu près proportionnelles aux probabilités. La fréquence peut donc servir de mesure a posteriori de la probabilité. A condition bien sur de rester dans les mêmes conditions. C'est le principe de la statistique probabiliste. Et aussi celui des assurances qui ne peuvent établir d'une autre façon la probabilité des sinistres. C'est aussi le credo d'une fondation *expérimentale* du calcul des probabilités qui ne s'embarrasse plus de philosophie. « *L'ensemble des caractères ainsi contenus dans la formule de Bernoulli suffit à définir le hasard et à reconnaître les causes qui viennent le troubler* »

Carvallo se donne un second outil dérivé du premier pour tester la permanence des conditions : la règle de Bertrand. Si les observations sont bien au hasard, alors le rapport de la somme des carrés et du carré de la somme (en valeur absolue) des écarts doit être égal $\pi/2$. Prenez 10000 fois la 7ème décimale dans une table de logarithme, et faites l'opération sur les

[13] Sur les abaques ; voir le traité de nomographie de son collègue répétiteur à Polytechnique Maurice d'Ocagne (1891) et le premier ouvrage de Fréchet (1928) sur le même sujet.

10 écarts entre fréquence et probabilité…Carvallo l'a fait et il a trouvé 1,561 au lieu de $\pi/2 = 1,5708$. Cette approximation lui suffit pour affirmer que ces décimales sont bien au hasard. Voici qui donne au hasard une nouvelle définition : le hasard, c'est la loi de Bernoulli, c'est la normalité des écarts. Carvallo l'affirme sans détour : *« Le hasard est un ensemble de causes imperceptibles ou incalculables pour nous mais déterminées, qui viennent varier les effets d'une façon importante mais inconnue, d'une façon capricieuse mais équitable, je veux dire conforme à la loi de Bernoulli.* »

Le chapitre II du traité de Carvallo est presque entièrement dédié à une étude de cas sur le ratio de masculinité à la naissance. Il est intéressant de noter que la question traitée correspond précisément à l'énoncé du problème posé par Lucien March au concours de statisticien du Ministère du Travail de février 1907, Carvallo ayant été membre du jury de ce concours. On donnait pour 26 années le nombre de nés vivants et de morts nés classés selon le sexe, et le travail à faire était d'analyser ces données et plus précisément de comparer « la distribution des écarts annuels à la distribution théorique des écarts accidentels ». On sait que cette question du sex-ratio à la naissance a traversé l'histoire de la statistique mathématique sur près de deux siècles, si j'en crois B. Bru [2006] depuis la correspondance de Nicolas Bernoulli et Montmort sur la question, 232 ans avant ma naissance jour pour jour ! Pendant longtemps, la proportion de garçons à la naissance a été considérée comme une des seules statistiques pour laquelle la régularité statistique pouvait être attestée, et le modèle Bernoullien de l'urne de composition constante justifié. Les prétentions de Quetelet à voir des lois partout ayant été l'objet de maintes attaques de principe, puis de dénégations de la part de Dormoy et Lexis, armés de tests qui excluaient à peu près tous les exemples connus de régularité statistique, le sex-ratio restait le seul exemple qui échappait à ce travail de sape rondement mené. Mais depuis les travaux de Halbwachs, le doute sur les variations de cette soi disant constante entre Paris et Londres, entre ville et campagne, entre temps de guerre et temps de paix, avait fait place à une quasi certitude que des phénomènes sociaux et culturels bien précis étaient la raison, si ce n'est la cause, de ces variations[14]. L'originalité de Carvallo n'est pas seulement de faire un corrigé rapide de l'exercice. Certes les écarts au modèle de Bernoulli, avec l'hypothèse que la probabilité de naissance des garçons serait estimée par la fréquence observée de 0,5150, sont trop grands pour les vivants, et un tel écart n'a que 3% de chance de se produire. Il va traiter en détail de cette problématique sur 25 pages d'un traité élémentaire qui en comporte 160, mobilisant à la fois des données et des raisonnements nouveaux. Sur les données de Jacques Bertillon il étudie l'influence de l'âge de la mère et de la légitimité, ainsi que l'hypothèse d'un possible défaut de déclaration des embryons : il y aurait 5 fois plus d'embryons dissimulés que d'embryons déclarés. Il interroge ensuite les statistiques espagnoles pour lesquelles la masculinité est plus forte qu'en France, Angleterre, Belgique et Suisse. « En résumé la masculinité statistique dépend du temps, du lieu, de l'état civil, et de l'âge de la mère et se voit biaisée par un défaut de la statistique relative aux embryons ».

Sur la mortalité, Carvallo mène un travail analogue de recensement des sources – les tables de mortalité des compagnies d'assurance ou de la Statistique Générale de la France – et met en œuvre le test de la loi de Bernoulli. « L'assimilation n'est pas légitime » conclut-il. Il faut donc s'en tenir aux ajustements empiriques des tables par la formule de Gompertz (1825) améliorée par Makeham, ou par celle de l'actuaire Quiquet (1893).

Carvallo termine son chapitre par des exemples empruntés aux mesures physiques, astronomiques en particulier. Données de Bradley sur la déclinaison d'une étoile, masse de Jupiter selon Laplace. La mise en défaut de la loi de Bernoulli est récurrente. Ni la série de

[14] Cf les travaux récents de Brian sur Halbwachs et le sex ratio.

Bradley, ni les observations de Pund sur les satellites de Jupiter ne sont assimilables à un tirage au sort dans une urne stable. D'une part il est douteux que les erreurs suivent une loi de Bernoulli. D'autre part « on n'est jamais certain que toutes les erreurs systématiques existantes ont été éliminées. »

Conclusion

Le trajet du théorème de Bernoulli dans les traités de Statistique et Probabilité du XIX^{e} siècle est révélateur d'une attitude plus générale des statisticiens vis-à-vis du calcul des probabilités.

Nous avons commencé par lire dans le traité de Lacroix un grand enthousiasme dans l'usage du calcul des probabilité, qui n'était d'ailleurs que le reflet de celui de Condorcet et Laplace, le premier y trouvant un motif de croire dans la certitude possible de certains résultats des sciences d'observation, pourvu qu'on ait l'ivresse…des grands nombres, le second développant dans la *Théorie générale* et dans *l'Essa*i une confiance de plus en plus affirmée dans les outils de ce calcul au point d'en faire la condition unique du progrès des sciences : « Le système entier des connaissances humaines se rattache à la théorie exposée dans cet essai » peut on lire à la première page de celui-ci. Lorsque Laplace évoque le théorème de Bernoulli, « indiqué par le bon sens » mais démontré « par l'illustre géomètre Jacques Bernoulli », il écrit « concevons, par exemple une urne… ». Cette urne est devenue le modèle de tous les faits assimilables aux effets d'une « multiplication indéfinie des événements ». Quetelet est encore dans la ligne de ces enthousiastes géomètres quand il donne sa théorie de l'homme moyen et fonde sa physique sociale sur ce même modèle de l'urne.

Petit à petit, le hasard est domestiqué mais en même temps le voilà ligoté dans une seule configuration : celle de « La Loi de possibilité » de Quetelet, qui deviendra sous la plume de Galton en 1889 « la loi normale … que les Grecs auraient déifiée s'ils l'avaient connue. »

Avec Cournot commence l'entreprise de démolition de ce dogme. Avec son humour sarcastique, Bertrand en montre une dernière fois les beautés et les limites. Une sorte de chant du cygne. Il reste un moyen de sauver ce modèle, c'est d'en faire une boîte noire, une machine automatique à traquer le hasard. La tentation est forte pour un répétiteur de Polytechnique, formateur d'ingénieurs et d'officiers, d'en démocratiser l'accès et de réduire le Théorème à une loi et la loi à une Table. Ce que fait Carvallo. L'entreprise pédagogique est réussie. Mais son honnêteté le conduit à reconnaître que l'outil est pervers. Finalement l'usage de la loi de Bernoulli dans les sciences apparaît plutôt comme celui d'un outil de falsification. Bien peu d'épreuves passent le test. Carvallo ne s'en chagrine pas car la procédure dit-il *« permet de découvrir les causes qui viennent troubler la loi des écarts de Bernoulli. Elle nous a révélé l'influence des embryons sur la masculinité et la fraude sur la taille des conscrits. Ou encore l'influence de la flexion des lunettes sur la mesure de la latitude d'un astre.* ».

Mais il faut savoir que d'autres s'en chagrinent. C'est précisément cette question de l'assimilation du hasard à la loi de Bernoulli-Moivre-Laplace-Gauss qui fait problème autour de 1900 entre les statisticiens allemands et français, comme en témoigne l'article de L. von Bortkiewitz de l'Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées (1906] et sa version française de F. Oltramare. [Armatte, 2005] « *En général, la concordance n'existera pas (...) les écarts qui existent entre ces moyennes et les valeurs particulières qui ont servi à les former, bien que pouvant présenter le caractère d'erreurs accidentelles, dépassent souvent notablement les limites prévues par la théorie ».* Les auteurs allemands sont dès lors partagés entre deux points de vue : soit il faut rejeter totalement l'usage du calcul des probabilités en statistique, puisque son utilité pratique est jugée « fort précaire », et se contenter d'ajustements empiriques : *« Ils envisagent les formules qui servent à représenter, avec une approximation convenable, certaines probabilités, comme par exemple celle des décès en fonction de l'âge ou encore le taux de la mortalité en fonction de l'âge, comme de simples expédients, qui n'ont aucun des caractères essentiels des formules de la mécanique rationnelle ou de la physique mathématique » ;* soit il faut renouveler totalement ce calcul des probabilités ; ce qui commence par l'abandon du modèle de Bernoulli comme forme unique du hasard, et l'invention de modèles de la « variabilité des chances » un peu plus variés, pour mieux coller à la réalité des observations. Comme le font Lexis puis Bortkiewitz au tournant du siècle. Mais pour démêler les causes constantes des causes variables, il est possible aussi de suivre une autre route, celle de l'analyse de variance et de l'analyse de corrélation. Celle de Ronald Fisher quelques années plus tard.

.

Bibliographie

ARMATTE M., 1991, "Une discipline dans tous ses états: la Statistique à travers ses traités (1800-1914), Revue de synthèse, IVème série, N°2, Avril-juin 1991

ARMATTE M., 1995, Histoire du Modèle linéaire. Formes et usages en Statistique et en Econométrie jusqu'en 1945, Thèse EHESS, sous la dir. de J. Mairesse.

ARMATTE M., 2001, "Developments in Statistical reasonning and their links with mathematics" in *Changing Images in Mathematics, From the French Revolution to the new Millenium*, U. Bottazzini et A. Dahan Dalmedico (dir), London, Harwood Acad. Publish, pp. 137-162.

ARMATTE M., 2005, « Lucien March: statistiques sans probabilité », *Journal électronique d'histoire des probabilités et de la statistique*, Vol.1/N°1, mars 2005. www.jehps.net.

BERNOULLI J., 1713, *Ars Conjectandi,* traduction IV[e] partie par Norbert Meusnier, IREM, 1987.

BERTRAND J ., 1889, *Calcul des probabilités*, 1ère ed.1889, 2ème ed. 1907, 3ème édition, New York, Chelsea 1971, XLIX + 327 p).

BORTKIEWICZ L. (von), 1909, "Statistique". *Encyclopedie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées,* Tome I, 4ème Vol., 3ème fasc., 453-480, Jules Molk (ed), Gauthier-Villars, Paris; exposé par F. Oltramare, d'après "Anwendungen der Wahrscheinlischkeitsrechnung auf statistik", *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Leipzig, Teubner, 1901.

BRIAN E. et JAISSON M., 2005, "Probability, biology and sociology in human sex-ratio at birth. A note on the trace of the First World War », *jehps*, 1/1, mars 2005.

BRU B., 2006, "The Bernoulli code", *Journal électronique d'histoire des probabilités et de la statistique*, Vol.2/N°1, juin 2006. www.jehps.net.

CARVALLO E., 1912, *Le Calcul des Probabilités et ses applications*, Paris, Gauthier-Villars, 163 p.

COURNOT A.A., 1843, *Exposition de la théorie des chances et des probabilités.*, 1ère éd.. Oeuvres Complètes, Paris, Vrin, 1984 (ed B.Bru), 289 p.

FRECHET M., 1928, *Nomographie. Pratique et construction des abaques,* Paris, A. Colin, 208p.

KANG Z., 1989, *Lieu de Savoir Social. La Société de Statistique de Paris au XIXè siècle (1860-1910)*, Thèse de Doctorat en Histoire, dir. F. Furet, EHESS.

LACROIX, S.F., 1816, *Traité élémentaire du calcul des probabilités*, Paris, 1[ère] édition, Vve Courcier, 301 p., 2ème éd.1822 Bachelier, Gendre Courcier, 347 p., 3ème éd., 1833, 352 p.

OCAGNE M. (d'), 1891, *Nomographie*; *les Calculs usuels effectués au moyen des abaques*, Paris, Doin éditeur.

STIGLER S., 1999, *Statistics on the table. The History of Statistical Concepts and Methods*, Harvard University Press.

Annexe 1 : Liste des traités qui ont fait l'objet d'une analyse

[AFTALION 1928] Albert AFTALION, *Cours de Statistique*, *professé en 1927-1928 à la faculté de Droit*, (recueilli et rédigé par Jean Lhomme et Jean Priou, Paris, PUF, 1928, 313 p.

[AITKEN 1939] A.C. AITKEN, *Statistical Mathematics*, 5th ed., New York, Oliver and Boyd.

*[BACHELIER 1912] Louis BACHELIER, *Calcul des probabilités*, Paris, Gauthiers-Villars, 1912, 512 p.

[BENINI 1923], Rudolfo BENINI, *Principii de Statistica metodologica*, Turin, Unione tipografico-editrice torinese, 1913 (1906), 353 p.

[BERTILLON 1895] Jacques BERTILLON, *Cours élémentaire de Statistique Administrative*, Paris, Soc.Ed.Scientifiques, 1895, 593 p.

[BERTRAND 1971] Joseph BERTRAND, *Calcul des probabilités*, 3ème édition, New York, Chelsea 1971, XLIX + 327 p.,(1ère ed.1889, 2ème ed. 1907).

[BLOCK 1886] Maurice BLOCK, *Traité de Statistique*, Paris, Guillaumin, 562 p.,(1ère édition 1878).

*[BOREL 1909] Emile BOREL, *Eléments de probabilités*, Paris, Gauthier-Villars, 1909.

[BOWLEY 1902] Arthur-Lyon BOWLEY, *Elements of Statistics*, London, King and Son, 1902, 335 p., 2ème édition; (1ère éd. 1901).

[BOWLEY 1920] Arthur-Lyon BOWLEY, *Elements of Statistics*, London, King and Son, 1902, 454 p., 4ème édition; (1ère éd. 1901).

[CARVALLO 1912] Emmanuel CARVALLO, *Le Calcul des Probabilités et ses applications*, Paris, Gauthier-Villars, 163 p.

[COURNOT 1843] Antoine Augustin COURNOT, *Exposition de la theorie des chances et des probabilités.*, Oeuvres Complètes, Paris, Vrin, 1984 (ed B.Bru), 289 p., (1ère éd. 1843).

*[CRUM/PATTON 1925] William Leonard CRUM et Alson Currie PATTON, *An In troduction to the Methods of Economic Statistics*, New York, A.W. Shaw Cy, 1925, v+ 488p

[CZUBER 1921] Emmanuel CZUBER, *Die Statistischen Forschungs Methoden*, Wien, L.W.Seidel & Sohn, 1921, 234 p.

*[DARMOIS 1928] Georges DARMOIS, *Statistique Mathématique*, Paris, Librairie Douin, 1928, 307 p.+ 23.

[DAVIES 1922] Georges R.DAVIES, *Introduction to Economic Statistics*, N.Y., 1922, 160 p.

[DAY 1925]

[DUGE DE B. 1939] Léo DUGE de BERNONVILLE, *Initiation à l'Analyse statistique*, Paris, Librairie de Droit et de Jurisprudence, 230 p. 1939.

[FAURE 1906] Fernand FAURE, *Eléments de Statistique*, Paris, Larose et Tenin, 1906, 128 p.

[FISHER 1925] Ronald A.FISHER, *Statistical Methods for Research Workers*, Edinburgh, Oliver and Boyd, 1936, 6ème édition, 336 p.;(1ère éd. 1925; 13ème édition 1958)

*[FRECHET/HALBWACHS 1924] Maurice FRECHET et Maurice HALBWACHS, *Le Calcul des probabilités à la portée de tous*, Paris, Dunod, 1924, 294 p.

[GALVANI 1934] Luigi Galvani, *Statistica* Metodologica, in GINI (dir) Trattato *elementare di statistica,* Vol 1, Parte II. (*Intoduzione matematica allo studio del metodo statistico*) Milano, Antonio Giuffré, 223 p.

*[GINI 1933] Corrado GINI, *Trattario elementare di statistica*, Rome, 1933.

[GUILLARD 1855] Achille GUILLARD, *Eléments de statistique humaine ou démographie comparée*, Paris, Guillaumin, 1855, xxxii + 368 p.

*[HEUSCHLING 1847] Xavier HEUSCHLING, *Manuel de statistique ethnographique universelle*, Bruxelles, 1847, 504 p.

[HUBER 1943] Michel HUBER, 1943, *Cours de Statistique appliquée aux affaires*, *vol.II: Eléments de technique statistique*, Paris, Hermann, 285 P.

[HUBER 1946] Michel HUBER, 1946, *Statistiques Economiques Générales. 2. Les coûts des produits et des services. 3. Conjoncture et prévision*, in *Cours de Statistique Appliquée aux affaires*, Vol.IV, Paris, Hermann/ISUP.

[JEROME 1924] Harry JEROME, *Statistical Method*, N.Y., Harper, 1924, 395 p.

*[JONES 1921] D.Caradog JONES, *A first course in statistics*, London, 1921, 283 p.

[JORDAN 1927] Charles JORDAN, *Statistique Mathématique*, Paris, Gauthier Villars, 1927, 340 p.

[JULIN 1921] Armand JULIN, *Principes de Statistique théorique et appliquée*, tome1: Statistique théorique,Préface L.March, Paris, Marcel Rivière, 1921, 712 p.

[JULIN 1928] Armand JULIN, *Principes de Statistique théorique et appliquée*, tome 2: statistique économique; fasc.I: statistique du commerce extérieur et des transports, Paris, Marcel Rivière, 1923, 151 p.; fasc.II: statistique des prix et méthode des index-numbers, Paris, Marcel Rivière, 1928, 338 p.

[KEYNES 1921] John Maynard KEYNES, *A treatise on Probability*, London, Macmillan, 1921, 458 p., (rééditions 1929, 1943, 1948, 1952, 1957)

[KING 1912] Willford I. KING, *The elements of statistical method*, N.Y., Macmillan, 1912, 235 p.
[LACROIX 1816] S.F.LACROIX, *Traité élémentaire du calcul des probabilités*, Paris, 1ère édition, Vve Courcier, 301 p., 2ème éd.1822 Bachelier, Gendre Courcier, 347 p., 3ème éd., 1833, 352 p.
[LAPLACE 1825] Pierre Simon de LAPLACE P.S., *Essai philosophique sur les probabilités* , Paris, Bourgois, 1986, postface B.Bru, d'après la 5ème édition(1825), (1ère éd. 1814)
[LAURENT 1908] Herman LAURENT, *Statistique mathématique*, Paris, O.Doin, Encyclopédie scientifique, 268 p.
[LIESSE 1933] André LIESSE, *La Statistique. Ses difficultés. Ses procédés. Ses résultats*, Paris, Guillaumin et Alcan, 1905, 188 p., (2ème édition 1912, 3ème éd.1919, 4ème éd 1933).
[MARCH 1930] Lucien MARCH,*Les principes de la méthode statistique*, Paris, Alcan,1930, 796 p.
[MEITZEN 1891] August MEITZEN, *History Theory and Technique of Statistics*, Philadelphia, Am.Acad. of political and social science, 243 p., trad. anglaise de R.P.Falkner; édition originale : *Gechichte, Theorie und Technik der Statistik*, Berlin, 1886.
*[MONE 1834] François J.MONE, *Théorie de la Statistique*., Louvain, 1834, xxiii + 145 p., Trad de l'Allemand et du Latin par Emile Tandel, (1ère édition allemande 1824).
*[MOREAU DE JONNES 1856] Alexandre MOREAU DE JONNES, *Eléments de Statistique*, Paris, Guillaumin, 2ème éd., 1856, 460 p.;(1ère éd. 1847) .
*[NICEFORO 1925] Alfredo NICEFORO, *La méthode statistique et ses applications aux sciences naturelles, aux sciences sociales et à l'art*, Trad de l'italien de R.Jaquemin, Paris, M.Giard, 1925, 632 p.; (éd.ital. 1923).
*[PEUCHET 1805] Jacques PEUCHET, *Statistique élémentaire de la France*, Paris, Gilbert, 1805, 610 p.
*[POINCARE 1896] Henri Poincaré, *Calcul des Probabilités*, Leçons professées à la faculté des sciences de Paris (2ème semestre1893-94), Paris, G.Carré, 274 p.; (2ème éd. 1912)
*[POISSON 1837] Simon Denis POISSON, *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédées des règles générales du calcul des probabilités*, Paris, Bachelier, 1837.
*[QUETELET 1828] Adolphe QUETELET, *Instructions populaires sur le calcul des probabilités*, Bruxelles, Tarlier, 1828.
*[QUETELET 1835] Adolphe QUETELET, *Sur l'homme et le développement de ses facultés, ou Essai de physique sociale*, Paris, Bachelier, 1835, 625 p.
[QUETELET 1846] Adolphe QUETELET, *Lettre à S.A.R. le Duc Règnant de Saxe-Cobourg et Gotha, sur la théorie des probabilités appliquées aux sciences morales et politiques*, Bruxelles, Hayez, 442 p.
[RIETZ 1924] H.L.RIETZ H.L. (ed), *Handbook of Mathematical Statistics*, N.Y, Houghton Mifflin Cy., 1924, 221 p.
*[RIETZ 1927] H.L. RIETZ, *Mathematical statistics*, Chicago, The open court Cy., 1927, 181 p.; (2ème éd.1929, 3ème éd. 1936).
[SECRIST 1917] Horace SECRIST H, *An introduction to statistical methods*, New York, Macmillan, 1917, 469 p.,(2ème éd. 1921)
[TURQUAN 1891] Victor TURQUAN, *Manuel de statistique pratique*, Paris, Berger-Levrault, 1891, 564 p.
[VENN 1888] John VENN, *The logic of chance*, London, Macmilan, 3ème éd. 1888, 503 p., (1ère éd.1866, 2ème éd. 1876).
[YULE 1922] George Udny YULE, *An introduction to the theory of statistics*, Londres, Griffin, 6ème éd., 1922, 415 p.; (1ère éd. 1911).
[YULE/KENDALL 1937] George Udny YULE et Maurice KENDALL, *An introduction to the theory of statistics*, Londres, Griffin, 11ème éd., 1937, 570 p.; (14ème éd. 1950)
[ZIZEK 1913] Franz ZIZEK, *Statistical averages*, traduction de W.M.Persons, New York, 1913, 392 p.

* Ces ouvrages ont fait l'objet d'une analyse de contenu mais pas des citations.

Annexe2 : Tableau des citations (Extrait)

en nb absolu			TABLEAU DES CITATIONS																
			Quétel	Yule	Pearso	Galton	Bowley	Bernou	Jevons	Laplac	Poisso	Edgew	Lexis	Gauss	Person	Bertillo	Fisher.I		
CITES					K.Pearson			J.Bernoulli				Edgeworth		Gauss			I.Fisher		
				Yule			Bowley			Laplac	Poisson				Persons				
CITEURS	DATE	1ED	Quételet			Galton			Jevons				Lexis			J.Bertillon			
																		TOTAL>1	TOTAL
AITKEN	1947	1939		2	11	4	4				4							58	58
AFTALION	1928	1928		4		2	2		2						6		9	107	116
BENINI	1923	1906	5			8	2											54	76
BERTILLON	1895	1895	13										4			7		131	131
BERTRAND	1971	1889	5					18		18	21			25				139	139
BLOCK	1886	1878	23							7			3					214	214
BOWLEY02	1902	1902	7	3	5	4			2			12				4		51	51
BOWLEY20	1920	1902	3	9	13	2			3			13				3		74	74
CARVALLO	1912	1912	4					50		4	2			7		3		155	155
COURNOT	1984	1843	4					8		11	10							70	88
CZUBER	1921	1921		4	23	5					2	2	2					54	54
DAVIES	1922	1922					5								3		3	31	31
DAVIS	1941	1941		15	10	2	2		14			2		2	7		19	298	395
DAY	1925	1925		15	5		15								10		6	87	87
DUGE de B.	1939	1939				3		2		2				3				27	27
FAURE	1906	1906	5													3		61	69
FISHER25	1936	1925		3	11						5							31	31
GALVANI	1934	1934			3			6			2		3	2				65	65
GUILLARD	1855	1855	17							3								91	125
HUBER2	1943	1943		8	10	6	9	4	5	9	7	10	3	4			9	189	208
HUBER4	1944	1944	2				16		2						7	2	8	165	201
JEROME	1924	1924		3	2		5								7		15	53	53
JORDAN	1927	1927	3	3	16	3		12		9	4		4	5				98	98
JULIN	1921	1921	24	39	24	10	32	10	12	3		9		9		12		371	371
JULIN2	1928	1928		4			23		7			30			7		33	262	275
KEYNES	1921	1921	10	9	11		3	17	13	39	12	11	8	4				275	275
KING	1912	1912	3	11	10	7	25					3			2	9		98	104
LAPLACE	1986	1825						4						0				31	31
LAURENT	1908	1908	2					3						4		2		23	23
LIESSE	1933	1905	25			4		2	9									121	121
MARCH	1930	1930	4	4	11	6	4						6					65	65
MEITZEN	1891	1886	6										4					91	91
QUETEL46	1846	1846	5					4		5	1							36	36
RIETZ24	1927	1927		8	24			6			2		4	2	4		5	83	83
RISSER-TRAYNA	1957	1933	1	6	24	6				1	13	2	6	14				124	133
SECRIST	1921	1917		18	6	2	27		5						27		14	223	223
TURQUAN	1891	1891	4													4		65	65
VENN	1888	1866	8			8		3	7	5		7						73	73
YULE	1911	1911		27	48	20	6		5	6	3	13	4	3				171	171
YULE/KENDALL	1937	1911		39	62	17	7		4	3	15	13	6					315	327
ZIZEK	1913	1913	17	4	9	13	30	2	4			23	39		2	9		328	328
Somme			200	238	338	132	217	151	94	125	103	150	96	84	82	58	121	5058	5341
classt/Nb citations			4	2	1	7	3	5	11	8	14	6	13	17	15	23	9		
Nb citants			24	22	21	20	18	16	15	15	15	14	14	14	11	11	10		42
classt/Nb citants			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15		