Divulgaciones Matemáticas Vol. 10 No. 1(2002), pp. 63–78

El Teorema de extensión de Tietze

Tietze's extension Theorem

Francisco García Arenas (farenas@ualm.es)
María Luz Puertas (mpuertas@ualm.es)
Área de Geometría y Topología.
Facultad de Ciencias Experimentales.
Universidad de Almería.
04071 Almería. España.

Resumen

En este trabajo se hace un repaso a diferentes demostraciones que ha tenido el Teorema de extensión de Tietze, debidas a Hausdorff, Bohr, Urysohn y Mandelkern (esta última es la más simple y reciente).
Palabras y frases clave: Teorema de Tietze; Hausdorff; Bohr; Urysohn; Mandelkern.

Abstract

In this paper we survey different proofs of Tietze's extension Theorem due to Hausdorff, Bohr, Urysohn and Mandelkern (the last one is the simplest and more recent).
Key words and phrases: Tietze's Theorem; Hausdorff; Bohr; Urysohn; Mandelkern.

1 Introducción

El teorema de extensión de Tietze caracteriza los espacios topológicos en los que es posible extender al espacio total una función continua definida en un cerrado. Al principio el teorema era más modesto: simplemente afirmaba que dicha extensión era posible en ciertos espacios; solo más tarde aspiró a caracterizarlos. La primera demostración válida (para el caso de $\mathbb{R}^2$) es la que Lebesgue presentó en 1907 en [2]. La primera prueba válida en espacios métricos es la que dio Tietze en 1915 en [6] y por ello toma su nombre el teorema.

Recibido 2001/10/22. Aceptado 2002/04/03.
MSC (2000): Primary 54C20, 54-01.

Hay una demostración válida también sólo en espacios métricos debida a Hausdorff en 1919 (véase [1]), mucho más breve (y por tanto más popular) y que sólo requiere conocer las propiedades básicas del ínfimo de un conjunto de números reales, lo que la hace mucho más fácil de entender que la de Tietze e incluso que la que después daría Urysohn, si bien esa última es más general. Cualquier lector puede hallar una versión muy detallada de la misma en la proposición 5.3.8. de [4], que es un libro reciente y en castellano, por lo que será la única que no recojamos aquí.

Hay otra demostración poco conocida, debida a Harald Bohr, válida sólo en espacios métricos; puede hallarse propuesta como ejercicio 19 en la página 311 de [5] y tiene como aspecto más relevante que usa la integral de Riemann en su demostración. Como no he visto los detalles desarrollados en parte alguna, la incluimos.

Posteriormente se ambiciona cacterizar qué espacios satisfacen esa propiedad de extensión. La demostración clásica es la debida a Urysohn en 1925, (véase [7]); esta demostración del teorema de Tietze primero requiere establecer el lema de Urysohn, una de las joyas de la topología general elemental, y después los conceptos de serie de funciones y convergencia uniforme. Puede hallarse en cualquier texto sobre Topología General. La incluimos para que se aprecien los requerimientos en comparación con las otras.

Finalmente, Mark Mandelkern dio en 1993 una demostración que reunía las virtudes de todas las anteriores: era elemental en los conceptos usados (como la de Hausdorff, a diferencia de las de Bohr –que usa integrales– y Urysohn –que usa series–), no usaba el lema de Urysohn (al igual que las de Bohr y Hausdorff, a diferencia de la del propio Urysohn) y era válida en espacios normales (como la de Urysohn, a diferencia de las de Bohr y Hausdorff). Es decir, la versión "definitiva". La incluimos.

En este articulo divulgativo repasamos estas demostraciones.

2 En espacios métricos y sin lema de Urysohn

Teorema 2.1 (Bohr). *Si un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es metrizable, entonces para cualquier $A \subseteq X$ cerrado y cualquier $f : A \to [0,1]$ continua, existe una extensión continua de f a X, esto es, una aplicación $F : X \to [0,1]$, continua, tal que $F|_A = f$.*

Demostración. Enumeraremos los bloques en que se divide la demostración para facilitar su lectura y comprensión.
1) Sea A un cerrado del espacio métrico (X, d) y sea $f : A \to [0,1]$ continua en A. Sea $d(x) = d(x, A)$; como A es cerrado, $d(x) = 0$ si y sólo si $x \in A$.

Definamos $\psi_x(r) = \mathrm{Sup}\{f(y) : y \in A \cap B_r(x)\}$ para cada $r > 0$, con el convenio de que el supremo de un conjunto vacío es 0. Sea $g : X \setminus A \to \mathbb{R}^+$ la función definida como

$$g(x) = \int_{d(x)}^{2d(x)} \frac{\psi_x(r)}{d(x)} dr.$$

Nótese que ψ_x es una función definida de $\mathbb{R}^+$ en $[0, 1]$ y que $d(x) > 0$ en $X \setminus A$, luego el integrando está perfectamente definido y es siempre positivo. Además $\psi_x(r)$ es monótona: nótese que si $r \leq s$, entonces $A \cap B_r(x) \subset A \cap B_s(x)$, con lo que al tomar supremos $\psi_x(r) \leq \psi_x(s)$. En consecuencia el integrando es una función integrable (y por tanto la función g está bien definida).

2) Es claro que g es una función positiva; veamos que g es continua en $X \setminus A$. Para ello dado $x_0 \in X \setminus A$ hemos de probar que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X \setminus A$ verifica $d(x, x_0) < \delta$, entonces $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$.

Así pues sea $d(x, x_0) < \delta$ (ese δ se puede tomar para que sea menor que $d(x_0)$ para evitar problemas). Como $g(x_0)$ se obtiene mediante una integral entre $d(x_0)$ y $2d(x_0)$, $d(x_0) \leq r \leq 2d(x_0)$. Por otro lado $d(x_0) = d(x_0, A) \leq d(x, A) + d(x, x_0)$ (usando la desigualdad triangular y tomando supremos), luego $d(x_0) \leq d(x) + \delta$ y de ahí $d(x_0) - \delta \leq d(x)$. Análogamente se obtiene $d(x) \leq d(x_0) + \delta$. Eso se traduce por medio de la desigualdad triangular en la siguiente inclusión entre bolas: $B_{r-\delta}(x_0) \subset B_r(x) \subset B_{r+\delta}(x_0)$. Y al tomar los supremos que definen a ψ se obtienen las desigualdades $\psi_{x_0}(r - \delta) \leq \psi_x(r) \leq \psi_{x_0}(r + \delta)$. Tomando integrales eso se traduce en:

$$g(x) = \int_{d(x)}^{2d(x)} \frac{\psi_x(r)}{d(x)} dr \leq \int_{d(x)}^{2d(x)} \frac{\psi_{x_0}(r + \delta)}{d(x)} dr;$$

como $d(x_0) - \delta \leq d(x)$, eso es a su vez estrictamente menor que

$$\int_{d(x)}^{2d(x)} \frac{\psi_{x_0}(r + \delta)}{d(x_0) - \delta} dr.$$

Descomponiendo el intervalo de integración en tres se obtiene

$$g(x) \leq \int_{d(x_0)-\delta}^{2d(x_0)-\delta} \frac{\psi_{x_0}(r + \delta)}{d(x_0) - \delta}\, dr - \int_{d(x_0)-\delta}^{d(x)} \frac{\psi_{x_0}(r + \delta)}{d(x_0) - \delta}\, dr + \int_{2d(x_0)-\delta}^{2d(x)} \frac{\psi_{x_0}(r + \delta)}{d(x_0) - \delta}\, dr.$$

En la primera integral aplicamos el cambio lineal de variables de $r \to r + \delta$; en las otras dos usamos que el integrando está acotado entre 0 y 1 y nos queda, acotando por 0 ó 1 según convenga:

$$g(x) \leq \int_{d(x_0)}^{2d(x_0)} \frac{\psi_{x_0}(r)}{d(x_0)-\delta} dr - \int_{d(x_0)-\delta}^{d(x)} \frac{0}{d(x_0)-\delta} dr + \int_{2d(x_0)-\delta}^{2d(x)} \frac{1}{d(x_0)-\delta} dr$$

$$= \frac{1}{d(x_0)-\delta}(g(x_0)d(x_0) + (2d(x) - 2d(x_0) + \delta))$$

$$= \frac{1}{d(x_0)-\delta}(g(x_0)d(x_0) + 2(d(x) - d(x_0)) + \delta)$$

y como $d(x) - d(x_0) < \delta$, tenemos

$$g(x) - g(x_0) < \frac{1}{d(x_0)-\delta}(g(x_0)d(x_0) + 3\delta) - g(x_0) = \frac{\delta(3+g(x_0))}{d(x_0)-\delta}.$$

Análogamente, usando $\psi_{x_0}(r-\delta) \leq \psi_x(r)$ en vez de $\psi_x(r) \leq \psi_{x_0}(r+\delta)$ y $d(x) < d(x_0) + \delta$ en vez de $d(x_0) - \delta \leq d(x)$ y con el mismo procedimiento (dividiendo en tres trozos apropiados el intervalo de integración, haciendo el cambio lineal $r \to r - \delta$ en una de las integrales y acotando por 0 ó 1 las otras dos, según convenga) se obtiene

$$g(x) = \int_{d(x)}^{2d(x)} \frac{\psi_x(r)}{d(x)}\, dr > \int_{d(x)}^{2d(x)} \frac{\psi_{x_0}(r-\delta)}{d(x_0)+\delta}\, dr$$

$$\geq \int_{d(x_0)+\delta}^{2d(x_0)+\delta} \frac{\psi_{x_0}(r-\delta)}{d(x_0)+\delta}\, dr + \int_{d(x_0)+\delta}^{d(x)} \frac{\psi_{x_0}(r-\delta)}{d(x_0)+\delta}\, dr - \int_{2d(x_0)+\delta}^{2d(x)} \frac{\psi_{x_0}(r-\delta)}{d(x_0)+\delta}\, dr$$

$$\geq \int_{d(x_0)}^{2d(x_0)} \frac{\psi_{x_0}(r)}{d(x_0)+\delta}\, dr + \int_{d(x_0)+\delta}^{d(x)} \frac{0}{d(x_0)+\delta}\, dr - \int_{2d(x_0)+\delta}^{2d(x)} \frac{1}{d(x_0)+\delta}\, dr$$

$$= \frac{1}{d(x_0)+\delta}(g(x_0)d(x_0) - (2d(x_0) + \delta - 2d(x)))$$

$$= \frac{1}{d(x_0)+\delta}(g(x_0)d(x_0) + 2(d(x) - d(x_0)) - \delta$$

y como $d(x) - d(x_0) > -\delta$, entonces

$$g(x) - g(x_0) > \frac{1}{d(x_0)+\delta}(g(x_0)d(x_0) - 3\delta) - g(x_0)$$

$$= -\frac{\delta(3+g(x_0))}{d(x_0)+\delta} > -\frac{\delta(3+g(x_0))}{d(x_0)-\delta}.$$

De todo lo anterior se deduce la acotación

$$|g(x) - g(x_0)| < \frac{\delta(3 + g(x_0))}{d(x_0) - \delta}$$

y esa cota puede hacerse siempre $< \varepsilon$, ya que viene dada sólo en función de valores concretos de g y d en x_0 y de δ, así que basta hacer δ suficientemente pequeño para que sea eso $< \varepsilon$.

Veamos ahora que la imagen de g está contenida en [0,1]. Como f está acotada por 1, también lo está $\psi_x(r)$ que se construye tomando supremos de valores de f, luego

$$g(x) \leq \int_{d(x)}^{2d(x)} \frac{1}{d(x)} dr = \frac{2d(x) - d(x)}{d(x)} = 1,$$

así pues g también está acotada por 1.
3) Definamos ahora la extensión de f que buscamos:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in A \\ g(x) & \text{si} \quad x \in X \setminus A \end{cases}$$

Claramente F es una función definida en todo X, cuya imagen está contenida en [0,1] y que extiende a f. Resta ver que F es continua en todo punto de X, es decir, dado $x_0 \in X$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ verifica $d(x, x_0) < \delta$, entonces $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$. Sabemos que sus restricciones a A y a $X \setminus A$ son continuas, así que el único caso por considerar es que $x_0 \in A$ y $x \in X \setminus A$ (o viceversa), en cuyo caso hay que probar que si $x_0 \in A$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X \setminus A$ verifica $d(x, x_0) < \delta$, entonces $|g(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Para ello, como ψ_x creciente y como $r \leq 2d(x)$ entonces

$$g(x) \leq \int_{d(x)}^{2d(x)} \frac{\psi_x(2d(x))}{d(x)} dr = \frac{2d(x) - d(x)}{d(x)} \psi_x(2d(x)) = \psi_x(2d(x)).$$

Por otro lado $B_{2d(x)}(x) \subset B_{3\delta}(x_0)$ (si $y \in B_{2d(x)}(x)$, entonces $d(y, x) < 2d(x)$, luego $d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < 2d(x) + \delta$, y como $x_0 \in A$, $d(x) < d(x, x_0) < \delta$, de donde $d(y, x_0) < 3\delta$). De esa inclusión de conjuntos sale al tomar supremos $\psi_x(2d(x)) \leq \psi_{x_0}(3\delta)$, luego $g(x) \leq \operatorname{Sup}\{f(y) : y \in A \cap B_{3\delta}(x_0)\}$.

Analogamente se obtiene $g(x) \geq \operatorname{Inf}\{f(y) : y \in A \cap B_{3\delta}(x_0)\}$ ya que $\psi_x(r) = \operatorname{Sup}\{f(y) : y \in A \cap B_r(x)\} \geq \operatorname{Inf}\{f(y) : y \in A \cap B_r(x)\}$ pues el supremo es siempre mayor que el ínfimo, y eso a su vez es mayor o igual que

$\operatorname{Inf}\{f(y) : y \in A \cap B_{3\delta}(x_0)\}$ puesto que $A \cap B_r(x) \subset A \cap B_{3\delta}(x_0)$ (para probar eso, nótese que $A \cap B_r(x) \neq \emptyset$, ya que si fuera vacío, entoces $B_r(x) \subset X \setminus A$, de donde $d(x) = d(x, A) > r$, lo que contradice $d(x) \leq r \leq 2d(x)$. Así pues sea $z \in A \cap B_r(x)$; entonces $d(x_0, z) \leq d(x_0, x) + d(x, z) < \delta + r$ y como $r \leq 2d(x) < 2\delta$, tenemos $d(x_0, z) < 3\delta$). Finalmente, integrando respecto a r entre $d(x)$ y $2d(x)$ a ambos lados de la desigualdad $\psi_x(r) \geq \operatorname{Inf}\{f(y) : y \in A \cap B_{3\delta}(x_0)\}$ ya obtenida, y tras dividir por $d(x)$ ambos miembros, se tiene $g(x) \geq \operatorname{Inf}\{f(y) : y \in A \cap B_{3\delta}(x_0)\}$.

De ambas cosas se infiere que $\operatorname{Inf}\{f(y) : y \in A \cap B_{3\delta}(x_0)\} - f(x_0) \leq g(x) - f(x_0) \leq \operatorname{Sup}\{f(y) : y \in A \cap B_{3\delta}(x_0)\} - f(x_0)$, pero la continuidad de f en A permite asegurar que existe $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño para asegurar que $|\operatorname{Sup}\{f(y) : y \in A \cap B_{3\delta}(x_0)\} - f(x_0)| < \varepsilon$ y que $|\operatorname{Inf}\{f(y) : y \in A \cap B_{3\delta}(x_0)\} - f(x_0)| < \varepsilon$, lo que nos da la continuidad de F y concluye la demostración del teorema. $\square$

3 En espacios normales y con lema de Urysohn.

Teorema 3.1. (Lema de Urysohn.) *Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es normal si y sólo si para cada par de cerrados A y B disjuntos en X, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$.*

Demostración. En primer lugar supongamos que A y B son dos cerrados disjuntos en X y que $f : X \to [0, 1]$ es una función continua tal que $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$; entonces $U = f^{-1}([0, \frac{1}{2}[)$ y $V = f^{-1}(]\frac{1}{2}, 1])$ son abiertos disjuntos en X tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$; por lo tanto $(X, \mathcal{T})$ es un espacio normal.

Supongamos ahora que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico normal y sean A y B dos cerrados disjuntos en X.
1) Vamos a construir una familia $\{U_r : r \in D\}$ de abiertos de X, con D el conjunto de los números diádicos (esto es $D = \{\frac{k}{2^n} : n \in \mathbb{N}, k \in \{1, \ldots, 2^n - 1\}\}$) tal que:

1. $A \subseteq U_r$ y $\overline{U_r} \cap B = \emptyset$ para cada $r \in D$;
2. $\overline{U_r} \subseteq U_s$, siempre que $r, s \in D$ con $r < s$.

Por la normalidad de X, existe un abierto $U_{\frac{1}{2}}$ tal que $A \subseteq U_{\frac{1}{2}}$ y $B \cap \overline{U_{\frac{1}{2}}} = \emptyset$ (existen abiertos disjuntos $U = U_{\frac{1}{2}}$ y V tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$, así que $\overline{U} \cap B = \emptyset$ porque en caso contrario $x \in \overline{U} \cap B \Rightarrow U \cap V \neq \emptyset$).

Ahora consideramos las parejas de cerrados disjuntos A y $X - U_{\frac{1}{2}}$, con la que construimos por el mismo procedimiento $U_{\frac{1}{4}}$, y $\overline{U_{\frac{1}{2}}}$ y B, con los que construimos $U_{\frac{3}{4}}$. Tenemos así que: $A \subseteq U_{\frac{1}{4}}$; $\overline{U_{\frac{1}{4}}} \cap (X \setminus U_{\frac{1}{2}}) = \emptyset$, o lo que es lo mismo, $\overline{U_{\frac{1}{4}}} \subseteq U_{\frac{1}{2}}$; $\overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq U_{\frac{3}{4}}$.

Tenemos ya construidos los abiertos correspondientes a los números diádicos con $n = 1, 2$; procedamos ahora por inducción sobre n para construir el resto.

La hipótesis de inducción es: $A \subseteq U_{\frac{1}{2^{n-1}}}$; $\overline{U_{\frac{1}{2^{n-1}}}} \subseteq U_{\frac{2}{2^{n-1}}}$; $\ldots$; $\overline{U_{\frac{2^{n-1}-2}{2^{n-1}}}} \subseteq U_{\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}}$; $\overline{U_{\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}}} \cap B = \emptyset$.

Vamos a demostrarlo ahora para el natural n: aplicando sucesivamente la definición de normalidad obtenemos:

$$
\begin{array}{ll}
\text{de } A \text{ y } X - U_{\frac{1}{2^{n-1}}} & \text{obtenemos } U_{\frac{1}{2^n}} \text{ abierto con} \\
 & A \subseteq U_{\frac{1}{2^n}} \text{ y } \overline{U_{\frac{1}{2^n}}} \subseteq U_{\frac{1}{2^{n-1}}}; \\
\text{de } \overline{U_{\frac{1}{2^{n-1}}}} \text{ y } X - U_{\frac{2}{2^{n-1}}} & \text{obtenemos } U_{\frac{3}{2^n}} \text{ abierto con} \\
 & \overline{U_{\frac{1}{2^{n-1}}}} \subseteq U_{\frac{3}{2^n}} \text{ y } \overline{U_{\frac{3}{2^n}}} \subseteq U_{\frac{2}{2^{n-1}}}; \\
\vdots & \vdots \\
\text{de } \overline{U_{\frac{2^{n-1}-2}{2^{n-1}}}} \text{ y } X - U_{\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}} & \text{obtenemos } U_{\frac{2^n-3}{2^n}} \text{ abierto con} \\
 & \overline{U_{\frac{2^{n-1}-2}{2^{n-1}}}} \subseteq U_{\frac{2^n-3}{2^n}} \text{ y } \overline{U_{\frac{2^n-3}{2^n}}} \subseteq U_{\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}}; \\
\text{de } \overline{U_{\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}}} \text{ y } B & \text{obtenemos } U_{\frac{2^n-1}{2^n}} \text{ abierto con} \\
 & \overline{U_{\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}}} \subseteq U_{\frac{2^n-1}{2^n}} \text{ y } \overline{U_{\frac{2^n-1}{2^n}}} \cap B = \emptyset.
\end{array}
$$

Esto es, hemos construido los abiertos $U_{\frac{k}{2^n}}$ con $k \in \{1, \ldots, 2^n - 1\}$ tales que $A \subseteq U_{\frac{1}{2^n}}$; $\overline{U_{\frac{1}{2^n}}} \subseteq U_{\frac{2}{2^n}} (= U_{\frac{1}{2^{n-1}}})$; $\ldots$; $\overline{U_{\frac{2^n-2}{2^n}}} (= \overline{U_{\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}}}) \subseteq U_{\frac{2^n-1}{2^n}}$; $\overline{U_{\frac{2^n-1}{2^n}}} \cap B = \emptyset$, lo que finaliza la inducción.

2) Ahora vamos a definir la función f como sigue:

$$
f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin \bigcup_{r \in D} U_r \\ \operatorname{Inf}\{r \in D : x \in U_r\} & \text{si } x \in \bigcup_{r \in D} U_r. \end{cases}
$$

Esta función así definida verifica:

- $f(A) = 0$, ya que $A \subseteq U_r$ para cada $r \in D$,
- $f(B) = 1$, ya que $\overline{U_r} \cap B = \emptyset$ para cada $r \in D$.

3) Veamos finalmente que f es continua. En primer lugar hay que tener en cuenta que:

- Si $x \in \overline{U_r}$, entonces $f(x) \leq r$ (y por lo tanto si $x \in U_r$ se tiene $f(x) \leq r$): si $f(x) > r$ entonces existe $s \in D$ con $r < s < f(x)$ (por la densidad de D) y así $x \notin U_s$, pero como $r < s$, tenemos $x \in \overline{U_r} \subseteq U_s$, lo que es una contradicción;

- Si $x \notin U_s$, entonces $f(x) \geq s$ (y por lo tanto si $x \notin \overline{U_s}$ se tiene $f(x) \geq s$): si $f(x) < s$ entonces existe $r \in D$ con $x \in U_r$ tal que $f(x) \leq r < s$, así pues $x \in \overline{U_r} \subseteq U_s$, lo que es una contradicción.

Distinguimos tres casos:

1. f continua en $x \in X$ tal que $f(x) = 0$: dado $\varepsilon > 0$ hay que encontrar $U \in \mathcal{U}^x$ con $f(U) \subseteq [0, \varepsilon[$. Por la densidad de D en $[0,1]$, existe $r_0 \in D$ tal que $0 < r_0 < \varepsilon$. Como $f(x) = 0$, esto significa que $x \in U_{r_0} (\in \mathcal{U}^x)$ y además $f(U_{r_0}) \subseteq [0, r_0] \subseteq [0, \varepsilon[$ (ya que si $z \in U_{r_0}$, entonces $f(z) \leq r_0$); luego se puede tomar $U = U_{r_0}$.

2. f continua en $x \in X$ con $f(x) = 1$: dado $\varepsilon > 0$ hay que encontrar $U \in \mathcal{U}^x$ tal que $f(U) \subseteq]1-\varepsilon, 1]$. Por la densidad de D en $[0,1]$, existe $s_0 \in D$ tal que $1 - \varepsilon < s_0 < 1$. Como $f(x) = 1$, esto significa que $x \notin \cup_{r \in D} U_r \Rightarrow x \notin \overline{U_r}$ para cada $r \in D$ (si $x \in \overline{U_s}$ para $s \in D$ entonces existe $s' \in D$ con $s < s'$ lo que significa que $x \in \overline{U_s} \subseteq U_{s'}$, que no es cierto), luego $x \notin \overline{U_{s_0}}$, así que $f(x) \geq s_0$ de ahí $f(x) \in [s_0, 1] \subseteq]1-\varepsilon, 1]$; luego se puede tomar $U = X - \overline{U_{s_0}}$ (nótese que si $z \in U$ entonces $f(z) \geq s_0$).

3. f continua en $x \in X$ con $0 < f(x) < 1$: dado $\varepsilon > 0$ hay que encontrar $U \in \mathcal{U}^x$ tal que $f(U) \subseteq]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$. Por la densidad de D en $[0,1]$, existen $r, s \in D$ tales que $f(x) - \varepsilon < r < f(x) < s < f(x) + \varepsilon$. Es claro que $x \in U_s - \overline{U_r}$ (si $x \notin U_s$ entonces $f(x) \geq s$, lo que es falso, y si $x \in \overline{U_r}$ entonces $f(x) \leq r$, lo que es falso); así $U = U_s - \overline{U_r} \in \mathcal{U}^x$. Por último también es inmediato que $f(U) \subseteq [r, s] \subseteq]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$ (si $z \in U = U_s - \overline{U_r}$, $f(z) \leq s$ y por otra parte $f(z) \geq r$).

Luego f es continua en X como queríamos. $\square$

La necesaria generalización a intervalos cerrados cualesquiera es inmediata.

Corolario 3.2. *Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es normal si y sólo si para cada par de cerrados A y B disjuntos en X existe una función continua $f : X \to [a,b]$ (donde $a, b \in \mathbb{R}, a < b$) tal que $f(A) = a$ y $f(B) = b$.*

Demostración. Recuérdese que la aplicación $h : [0,1] \to [a,b]$ definida por $h(x) = (b-a)x + a$ para cada $x \in [0,1]$ es un homeomorfismo con $h(0) = a$ y $h(1) = b$.

- Supongamos en primer lugar que X normal y sean A y B dos cerrados disjuntos de X; usando el lema de Urysohn existe una aplicación $f' : X \to [0,1]$ continua tal que $f'(A) = 0$ y $f'(B) = 1$; bastará entonces tomar $f = h \circ f'$.
- Supuesto que $f : X \to [a,b]$ es una función continua tal que $f(A) = a$ y $f(B) = b$ entonces $f' = h^{-1} \circ f : X \to [0,1]$ también es continua; por lo tanto el lema de Urysohn asegura la normalidad de X.

$\square$

La definición y conceptos básicos de las series de números reales que se detallan a continuación serán imprescindibles en nuestra primera versión del teorema de extensión de Tietze.

Definición 3.3. Dada una sucesión de números reales $\{a_n\}$, se llama *serie* de término general $\{a_n\}$ a la sucesión $\{S_n\}$ donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Dicha sucesión se denota por $\sum_{n\geq 1} a_n$ y su límite, si existe, se denota por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (y en tal caso se dice que la serie es convergente y al límite se le llama suma de la serie).

Lema 3.4.

1. *Dados $a, z \in \mathbb{R}$, si $|z| < 1$, entonces la serie (que se llama* serie geométrica*) $\sum_{n\geq 0} az^n$ es convergente y además $\sum_{n=0}^{\infty} az^n = \frac{a}{1-z}$.*
2. *Si para dos series dadas $\sum_{n\geq 1} a_n$ y $\sum_{n\geq 1} b_n$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N$, $a_n = b_n$, entonces una serie es convergente si y sólo si lo es la otra.*
3. *Si $\sum_{n\geq 1} a_n$ y $\sum_{n\geq 1} b_n$ son dos series convergente y $c \in \mathbb{R}$ entonces las series $\sum_{n\geq 1} ca_n$ y $\sum_{n\geq 1}(a_n + b_n)$ también son convergentes y su sumas verifican: $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*
4. *Una serie de numeros reales $\sum_{n\geq 1} a_n$ se dice que es absolutamente convergente si la serie $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ es convergente; una serie absolutamente convergente es convergente.*
5. **(Criterio de comparación.)** *Sean $0 \leq a_n \leq b_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$; si $\sum_{n\geq 1} b_n$ es convergente entonces $\sum_{n\geq 1} a_n$ también es convergente y en tal caso las sumas de ambas series verifican la siguiente relación: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Podemos ya concluir la sección con la siguiente versión del teorema de extensión de Tietze, que no sólo vale en espacios normales sino que además permite tomar como rango de la aplicación a cualquier intervalo de $\mathbb{R}$, no sólo a $[0,1]$.

Teorema 3.5 (Urysohn,1925). *Un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ es normal si y sólo si para cualquier $A \subseteq X$ cerrado y cualquier $f : A \to J$ continua, donde J es un intervalo de $\mathbb{R}$, existe una extensión continua de f a X, esto es, una aplicación $F : X \to J$, continua, tal que $F|_A = f$.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Sean A y B subconjuntos cerrados y disjuntos de X; definimos la aplicación $f : A \cup B \to [0,1]$ como

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

f es continua y como $A \cup B$ es cerrado en X, por hipótesis existe $F : X \to [0,1]$ continua tal que $F|_{A\cup B} = f$ y por lo tanto $F(A) = 0$ y $F(B) = 1$. El Lema de Urysohn nos asegura que X es normal.

($\Rightarrow$) En primer lugar supongamos que $J = [-1,1]$ y sean $A \subseteq X$ un cerrado y $f : A \to [-1,1]$ continua. Sean

$$A_1 = \{x \in A : f(x) \geq \frac{1}{3}\} \quad B_1 = \{x \in A : f(x) \leq \frac{-1}{3}\}.$$

Tanto A_1 como B_1 son dos cerrados disjuntos en A y por lo tanto en X y por el corolario 3.2, existe una aplicación continua $f_1 : X \to [\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}]$ tal que $f_1(A_1) = \frac{1}{3}$ y $f_1(B_1) = \frac{-1}{3}$. Evidentemente, para cada $x \in A$, $|f(x) - f_1(x)| \leq \frac{2}{3}$ (nótese que los puntos $\frac{-1}{3}$ y $\frac{1}{3}$ dividen al intervalo $[-1,1]$ en tres partes iguales de longitud $\frac{2}{3}$), por lo tanto $f - f_1 : A \to [\frac{-2}{3}, \frac{2}{3}]$ es continua.

Ahora repetimos el proceso con $f - f_1 = g_1$. Esto es, dividimos el intervalo $[\frac{-2}{3}, \frac{2}{3}]$ en tres partes iguales (con $\frac{-2}{9}$ y $\frac{2}{9}$), definimos

$$A_2 = \{x \in A : g_1(x) \geq \frac{2}{9}\} \quad B_2 = \{x \in A : g_1(x) \leq \frac{-2}{9}\}.$$

De nuevo el corolario 3.2 aplicado a estos dos cerrados disjuntos nos proporciona una función $f_2 : X \to [\frac{-2}{9}, \frac{2}{9}]$, continua y tal que $f_2(A_2) = \frac{2}{9}$ y $f_2(B_2) = \frac{-2}{9}$. Claramente, ahora $|(f - f_1) - f_2| \leq \frac{4}{9} = (\frac{2}{3})^2$.

Para continuar el proceso por inducción, formulamos la siguiente hipótesis: sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 3$, supongamos que para cada $k \in \{1,\ldots,n\}$ hemos definido una aplicación $f_k : X \to [\frac{-1}{3}(\frac{2}{3})^{k-1}, \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{k-1}]$, continua, tal que, si $A_k = \{x \in A : (f - \sum_{i=1}^{k-1} f_i)(x) \geq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{k-1}\}$ y $B_k = \{x \in A : (f - \sum_{i=1}^{k-1} f_i)(x) \leq \frac{-1}{3}(\frac{2}{3})^{k-1}\}$, entonces $f_k(A_k) = \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{k-1}$, $f_k(B_k) = \frac{-1}{3}(\frac{2}{3})^{k-1}$ y $|f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)| \leq (\frac{2}{3})^n$, para cada $x \in A$.

La construcción para el natural $n+1$ es la siguiente: llamamos

$$A_{n+1} = \{x \in A : (f - \sum_{k=1}^{n} f_k)(x) \geq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n\}$$

$$B_{n+1} = \{x \in A : (f - \sum_{i=1}^{n} f_i)(x) \leq \frac{-1}{3}(\frac{2}{3})^n\}.$$

El corolario 3.2 nos proporciona una aplicación $f_{n+1} : X \to [\frac{-1}{3}(\frac{2}{3})^n, \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n]$, continua, tal que $f_{n+1}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$ y $f_{n+1}(B_{n+1}) = \frac{-1}{3}(\frac{2}{3})^n$. Además, para $x \in A_{n+1}$, $f_{n+1}(x) = \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$ y $(\frac{2}{3})^n \geq f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \geq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$, por lo tanto $|f(x)-\sum_{k=1}^{n+1} f_k(x)| = |(f(x)-\sum_{k=1}^{n} f_k(x))-f_{n+1}(x)| \leq (\frac{2}{3})^n-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n = (\frac{2}{3})^{n+1}$. Análogamente $|f(x) - \sum_{k=1}^{n+1} f_k(x)| \leq (\frac{2}{3})^{n+1}$ para cada $x \in A$. Esto concluye la inducción.

Hemos obtenido, pues, una sucesión de funciones continuas $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tales que $|f_n(x)| \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}$ para cada $x \in X$ y $|f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)| \leq (\frac{2}{3})^n$, para cada $x \in A$.

Definimos ahora la función $F : X \to [-1, 1]$ como $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ para cada $x \in X$. Veamos que está bien definida: para cada $x \in X$ y cada $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}$ y por el lema anterior, la serie $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ es convergente y su suma verifica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^m = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$.

Claramente $F(x) = f(x)$ para cada $x \in A$ (ya que, para $x \in A$, $|f(x) - F(x)| \leq \lim_{n\to\infty}(\frac{2}{3})^n = 0$).

Veamos ahora que F es continua: sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Tomamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty}(\frac{2}{3})^n < \frac{\varepsilon}{2}$ (lo que es posible al ser la serie convergente). Dado que cada f_n es continua, para cada $n \in \{1, \ldots, N\}$ elegimos un abierto U_n en X con $x \in U_n$ y tal que $f_n(U_n) \subseteq B_{f_n(x)}(\frac{\varepsilon}{2N})$. Entonces $U = U_1 \cap \cdots \cap U_n$ es un abierto de X con $x \in U$ y tal que, para cada $y \in U$ $|F(x) - F(y)| \leq \sum_{n=1}^{N} |f_n(x) - f_n(y)| + |\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(y)| < N\frac{\varepsilon}{2N} + |\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x) - f_n(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=N+1}^{\infty}(\frac{2}{3})^n \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Esto completa la demostración en el caso $J = [-1, 1]$.

Supongamos ahora que $J = [-1, 1[$ y sean A un subconjunto cerrado de X y $f : A \to [-1, 1[$ continua. Por la parte anterior (y dado que $[-1, 1[\subseteq [-1, 1])$ existe una extensión continua de f a X, que llamaremos $F' : X \to [-1, 1]$. Sea $A_0 = \{x \in X : F'(x) = 1\}$, así A_0 es un cerrado de X disjunto de A, y por el Lema de Urysohn existe una aplicación $g : X \to [0, 1]$ continua tal que $g(A_0) = 0$ y $g(A) = 1$. Definimos $F : X \to [-1, 1[$ como $F(x) = F'(x)g(x)$ para cada $x \in X$; F es claramente continua y está bien definida: $|F(x)| \leq |F'(x)| \leq 1$ y por otra parte si $1 = F(x) = F'(x)g(x)$, se tiene $1 = F'(x) = g(x)$, pero si $F'(x) = 1$, tenemos $x \in A_0$ y entonces $g(x) = 0$, así que $F(x) \neq 1$ para todo $x \in X$. Por lo tanto F es la extensión que buscábamos.

Ahora si $J =]-1, 1[$, repetimos el proceso con la extensión obtenida en el caso anterior y con $A_0 = \{x \in X : F'(x) = -1\}$.

Por último, sea J cualquier intervalo de $\mathbb{R}$, entonces es conocido que ha de ser homeomorfo a uno de estos tres: $[-1, 1]$, $[-1, 1[$, $]-1, 1[$, que llamaremos I y sea $h : J \to I$ un homeomorfismo entre ambos. Sean entonces A subconjunto cerrado de X y $f : A \to J$ continua, llamamos $f' = h \circ f : A \to J \to I$; ya hemos probado que existe una extensión continua $F' : X \to I$; definimos $F = h^{-1} \circ F' : X \to J$, que es continua y verifica que para cada $x \in A$, $F(x) = h^{-1} \circ F'(x) = h^{-1} \circ f'(x) = h^{-1} \circ h \circ f(x) = f(x)$, como queríamos. □

Teorema 3.6. *Si un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es normal, entonces para cualquier $C \subseteq X$ cerrado y cualquier $f : C \to [0, 1]$ continua, existe una extensión continua de f a X, esto es, una aplicación $F : X \to [0, 1]$, continua, tal que $F|_A = f$.*

4 En espacios normales y sin lema de Urysohn.

Teorema 4.1 (Mandelkern,1993). *Si un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es normal, entonces para cualquier $C \subseteq X$ cerrado y cualquier $f : C \to [0, 1]$ continua, existe una extensión continua de f a X, esto es, una aplicación $F : X \to [0, 1]$, continua, tal que $F|_C = f$.*

Demostración. Definimos los conjuntos

$$C_r = \{x \in C : f(x) \leq r\},$$

$$U_s = X \setminus \{x \in C : f(x) \geq s\},$$

para todo $r, s \in \mathbb{Q} \cap]0,1[$. Es claro que C_r es cerrado y U_s es abierto en X, pues C es cerrado y f es continua.

Ahora consideramos el subconjunto $P \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ dado por

$$P = \{(r,s) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : 0 \leq r < s < 1\}.$$

Nótese que si

$$(r,s) \in P$$

entonces claramente $C_r \subset U_s$, pues si $f(x) \leq r < s$, entonces es falso que $f(x) \geq s$.

Puesto que $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es numerable, se sigue que P es un conjunto numerable (y obviamente infinito). Por tanto podemos escribir P como una sucesión $P = \{(r_n, s_n) : n \in \mathbb{N}$. Construimos inductivamente una sucesión de conjuntos cerrados $H(r_n, s_n)$ con las siguientes propiedades para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$C_{r_n} \subset H(r_n, s_n)^\circ \subset H(r_n, s_n) \subset U_{s_n}. \tag{1}$$

$$H(r_n, s_n) \subset H(rm, sm)^\circ \text{ si } r_n < r_m \text{ y } s_n < s_m. \tag{2}$$

Para ello comenzamos encontrando, por la normalidad de X aplicada a los cerrados disjuntos C_{r_1} y $X \setminus U_{s_1}$, un cerrado $H(r_1, s_l)$ con la propiedad 1 para $n = 1$ (la propiedad 2 no tiene sentido para $n = 1$).

Supongamos que se han construido los cerrados $H(r_n, s_n)$ para $n \leq k-1$ cumpliendo las propiedades 1 y 2.

Para construir $H(r_k, s_k)$ procedemos como sigue. Sean J_k y L_k los subconjuntos de $\mathbb{N}$ definidos como sigue:

$$J_k = \{j \in \mathbb{N} : j < k,\ r_j < r_k \text{ y } s_j < s_k\}$$
$$L_k = \{i \in \mathbb{N} : i < k,\ r_k < r_i \text{ y } s_k < s_i\}.$$

Esos conjuntos están contenidos en $\{1, \ldots, k\}$, luego son finitos. Se tienen las siguientes inclusiones si $i \in L_k$ y $j \in J_k$:

(a) $C_{r_k} \subset C_{r_i} \subset H(r_i, s_i)^\circ$,

(b) $H(r_j, s_j) \subset H(r_i, s_i)^\circ$,

(c) $H(r_j, s_j) \subset U_{s_j} \subset U_{s_k}$.

En las inclusiones (a) y (c) $C_{r_k} \subset C_{r_i}$ y $U_{s_j} \subset U_{s_k}$ se siguen de las definiciones de C_r y U_s y del hecho de que $i \in L_k$ significa que $r_k < r_i$ y $j \in J_k$ significa que $s_j < s_k$.

Por su parte $C_{r_i} \subset H(r_i, s_i)^\circ$ se deduce de la condición 1 para $n \leq k-1$ pues $i \in L_k$ significa que $i < k$ y $H(r_j, s_j) \subset U_{s_j}$ se deduce de la condición 1 para $n \leq k-1$ pues $j \in J_k$ significa que $j < k$. Eso nos da (a) y (c).

La inclusión (b) sigue de la condición 2 para $n \leq k-1$, ya que $i \in L_k$ y $j \in J_k$ significan $r_j < r_k < r_i$ y $s_j < s_k < s_i$.

De (b) se deduce entonces que $H(r_j, s_j) \subset \bigcap\{H(r_i, s_i)^\circ : i \in L_k\}$ y de ahí

$$\bigcup\{H(r_j, s_j) : j \in J_k\} \subset \bigcap\{H(r_i, s_i)^\circ : i \in L_k\}$$

. De (a) tenemos $C_{r_k} \subset \bigcap\{H(r_i, s_i)^\circ : i \in L_k\}$, luego $C_{r_k} \cup \bigcup\{H(r_j, s_j) : j \in J_k\} \subset \bigcap\{H(r_i, s_i)^\circ : i \in L_k\}$. Finalmente de (c) se tiene $\bigcup\{H(r_j, s_j) : j \in J_k\} \subset U_{s_k}$ y de 1 se tiene $C_{r_k} \subset U_{s_k}$, luego

$$C_{r_k} \cup \bigcup\{H(r_j, s_j) : j \in J_k\} \subset U_{s_k} \cap \bigcap\{H(r_i, s_i)^\circ : i \in L_k\}.$$

El primer miembro es unión finita de cerrados, luego cerrado; el segundo miembro es intersección finita de abiertos, luego abierto.

Puesto que X es normal aplicado a los cerrados disjuntos $C_{r_k} \cup \bigcup\{H(r_j, s_j) : j \in J_k\}$ y $X \setminus (U_{s_k} \cap \bigcap\{H(r_i, s_i)^\circ : i \in L_k\})$, podemos encontrar un cerrado $H(r_k, s_k)$ en X tal que

$$C_{r_k} \cup \bigcup\{H(r_j, s_j) : j \in J_k\} \subset H(r_k, s_k)^\circ \subset H(r_k, s_k)$$

$$\subset U_{s_k} \cap \bigcap\{H(r_i, s_i)^\circ : i \in L_k\}$$

Las condiciones 1 y 2 se cumplen ahora para la familia $\{H(r_n, s_n) : l \leq n \leq k\}$ de manera inmediata: por la hipótesis de inducción se cumplen para $\{H(r_n, s_n) : l \leq n \leq k-1\}$; las condiciones para k se deducen de la ecuación anterior.

Puesto que $P = \{(r_n, s_n) : n \in \mathbb{N}\}$, podemos reescribir las condiciones (1) y (2) simplemente como

$$C_r \subset H(r,s)^\circ \subset H(r,s) \subset U_s, \tag{3}$$

$$H(r,s) \subset H(p,q)^\circ \tag{4}$$

donde $(r,s), (p,q) \in P$ y $r < p$, $s < q$.

Con esta nueva notación definimos, $X_r = \bigcap\{H(r,s) : (r,s) \in P\}$ para todo racional $0 \leq r < 1$. Hacemos $X_1 = X$. Ahora afirmamos que la familia de cerrados de X, $\{X_r : r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}$ tiene las siguientes propiedades:

$$X_r \subset X_s^\circ \text{ si } r, s \in \mathbb{Q} \text{ y } 0 \leq r < s \leq 1. \tag{5}$$

$$X_r \cap C = C_r \text{ si } r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]. \tag{6}$$

En efecto, tenemos que 5 es cierto, pues por la propiedad 4 y la definición de X_r, $X_r \subset H(r,s) \subset H(t,s)^\circ$ para $t \in \mathbb{Q}$ con $r < t < s$. Además, para todo $q \in \mathbb{Q}$ con $s < q < 1$ tenemos $H(t,s) \subset H(s,q)$ por lo que $(s > 0)$ $H(t,s) \subset \bigcap\{H(s,q) : O < s < q < 1\} = X_s$. Por tanto $X_r \subset H(t,s)^\circ \subset X_s^\circ$ y hemos probado 5.

Para ver 6 observamos que si $r < s$ entonces $C_r \subset H(r,s)$ por la propiedad 3, y por ello $C_r \subset \bigcap\{H(r,s) : O \leq r < s\} = X_r$.

Además, también por 3 tenemos de la definición de X_r que $X_r \subset \bigcap\{U_s : s > r\}$. Ahora bien, se tiene por la definición de C_r y U_s que $C_r = C \bigcap\{U_s : s > r\}$. Por tanto

$$C_r \subset C \cap X_r \subset C \cap \bigcap\{U_s : s > r\} = C_r$$

Así obtenemos 6.

Finalmente, sea $F : X \to [0,1]$ la función

$$F(x) = \inf\{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1] : x \in X_r\}.$$

Si $x \in C$, usando 6 tenemos que $x \in C_r$ si y sólo si $x \in X_r$, luego

$$f(x) = \inf\{r : f(x) \leq r\} = \inf\{r : x \in C_r\} = \inf\{r : x \in X_r\} = F(x).$$

Por tanto F es una extensión de f. Queda sólo comprobar que es continua. Para ello basta con ver que las preimágenes mediante F de los miembros de la base usual de abiertos de $[0,1]$, es decir $\mathcal{B} = \{]a,b[,]a,1], [0,b[: 0 \leq a < b \leq 1\}$ son abiertos en X. En efecto, si $0 \leq a < b \leq 1$ son números reales se tienen los siguientes abiertos (pues cada X_r es cerrado):

$$F^{-1}(]a,b[) = \bigcup\{(X_s \setminus X_r)^\circ : a < r < s < b\}. \tag{7}$$

$$F^{-1}([0,b[) = \bigcup\{X_s^\circ : 0 \leq r < s < b\}. \tag{8}$$

$$F^{-1}(]a,1]) = \bigcup\{(X_1 \setminus X_r)^\circ : a < r < s \leq 1\}. \tag{9}$$

Veamos por ejemplo 7 (los otros dos casos son análogos) Tomamos $p, q \in \mathbb{Q}$ con $a < p < F(x) < q < b$. Dado que $p < F(x)$ se tiene que $x \notin X_p$ por la definición de F. Igualmente, debe existir $t \in \mathbb{Q}$ con $F(x) < t < q$ y $x \in X_t$, por definicion de $F(x)$. Por la propiedad 5 tenemos $x \in X_q^\circ$, luego concluimos $x \in (X_q \setminus X_p)^\circ$.

Recíprocamente, si $x \in (X_s \setminus X_r)^\circ$ con $a < r < s < b$ tenemos que $F(x) > r > a$ por definición de F y la propiedad 5 y $F(x) \leq s < b$ por definición de F también, luego $x \in F^{-1}(]a, b[)$.

Esto concluye la demostración. $\square$

Referencias

[1] F. Hausdorff, *Über halbstetige Funktionen und deren Verallgemeinerung*, Math. Zeitschr. **5**(1919), 292–309.

[2] H. Lebesgue, *Sur le probléme de Dirichlet*, Rend. del Circ. Mat. di Palermo 24 (1907), 371-402.

[3] M. Mandelkern, *A short proof of the Tietze-Urysohn extension theorem*, Arch. Math. **60**(1993), 364–366.

[4] J. Margalef y E. Outerelo, *Introducción a la topología*, Ed. Complutense, 1993.

[5] K. R. Stromberg, *An introduction to classical real analysis*, Wadsworth International Group, 1981.

[6] H. Tietze, *Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind*, J. für die reine und angew. Math. **145**(1915), 9–14.

[7] P. Urysohn, *Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen*, Math. Ann. **94** (1925), 262–295.