Divulgaciones Matemáticas v. 6, No. 2 (1998), 87–91

Observaciones sobre Espacios de Toronto †

(Remarks about Toronto Spaces)

Nelson C. Hernández T.

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias Económicas y Sociales
Escuela de Estadística y Ciencias Actuariales
Caracas - Venezuela
(nhernand@sagi1.ucv.edu.ve)

Universidad Nacional Abierta
Nivel Central - Area de Matemática
Av. Los Calvani, No. 18, San Bernardino
Apdo. 2096, Caracas 1010
Venezuela
(nherna@ciiuna2.una.edu.ve)

Resumen

Un *espacio de Toronto* es un espacio topológico X tal que todos los subespacios $Y \subseteq X$ con la misma cardinalidad que X son homeomorfos a X. En el presente trabajo se presentan resultados relativos principalmente a espacios de Toronto T_2 y de cardinalidad regular $\kappa \geq \omega$, demostrándose que son totalmente disconexos. En particular para espacios de cardinalidad ω_1 se prueba que el conjunto de puntos aislados es denso y, si el espacio no es discreto, numerable.

Palabras y frases clave: espacio de Toronto, espacio T_2, homeomorfismo, espacio totalmente disconexo, cardinalidad.

†Recibido 96/09/15. Revisado 98/08/17. Aceptado el 98/10/20.
MSC (1991): 54G99; 54A25.

Abstract

A *Toronto space* is a topological space X such that any subspace $Y \subseteq X$ with the same cardinality than X is homeomorphic to X. In this paper we present results concerning mainly T_2 Toronto spaces with regular cardinality $\kappa \geq \omega$, proving that these spaces are totally disconnected. In particular for spaces with cardinality ω_1 we prove that the set of isolated points is dense and, if the space is not discrete, countable.
Key words and phrases: Toronto space, T_2 space, homeomorphism, totally disconnected space, cardinality.

1 Introducción

En el presente trabajo se presentan algunos resultados relativos a espacios de Toronto que pretenden esclarecer, en alguna medida, la naturaleza y características de estos espacios. Los Espacios de Toronto han sido estudiados por F. Tall y J. Steprans, entre otros, siendo este último quién formuló el siguiente problema conocido con el nombre de *Problema de Toronto*: ¿Es todo espacio de Toronto T_2 de cardinalidad ω_1 un espacio discreto? Notemos que si el espacio no es T_2 un contraejemplo es inmediato. Así mismo si el espacio es de cardinalidad contable y T_2, el espacio debe ser discreto. Hasta la fecha, la divulgación de resultados y las publicaciones relacionados con el problema de Toronto no son abundantes. Una referencia básica es Van Mill y Reed [3]. Para los conceptos necesarios de topología y teoría de conjuntos vea [1] y [2].

Terminología y Notación

$|A|$ denotará la cardinalidad del conjunto A. Si A es un subconjunto de un espacio topológico X usaremos $\mathrm{cl}(A)$ y $\mathrm{int}(A)$ para referirnos, respectivamente, a la clausura y al interior de A. El complemento de A en X será denotado por A^c. Si X e Y son espacios topológicos, $X \cong Y$ indicará que X e Y son homeomorfos.

2 Características de los espacios de Toronto

Recordemos que un espacio topológico X es un espacio T_2, o de Hausdorff, si para cualquier par de puntos distintos x, y en el espacio es posible hallar abiertos disjuntos U_x, U_y tales que $x \in U_x$ y $y \in U_y$.

Definición 1. *Un* espacio de Toronto *es un espacio topológico X tal que para cualquier $Y \subseteq X$, si $|Y| = |X|$ entonces $Y \cong X$.*

Cualquier conjunto X con la topología discreta es un espacio de Toronto. Así mismo si X es un conjunto infinito dotado de la topología cofinita (es decir aquella en la cual los abiertos son el conjunto vacío y los conjuntos de complemento finito) entonces X es un espacio de Toronto, no discreto. Este último ejemplo no es T_2, y esto explica porqué se exige esta propiedad de separación en el problema de Toronto mencionado en la introducción. Nos limitaremos por lo tanto a considerar espacios T_2 y de cardinalidad infinita, para evitar casos triviales.

A continuación probaremos una proposición que nos será de gran utilidad en el desarrollo del presente trabajo.

Proposición 1. *Sea X un espacio de Toronto T_2 de cardinalidad $\kappa \geq \omega$, entonces X tiene infinitos puntos aislados.*

Demostración: Veamos primero que X tiene al menos un punto aislado. Sean x, y puntos distintos en X y U_x, U_y abiertos disjuntos que contengan a x y a y, respectivamente. Es claro que $|U_x^c| = \kappa$ o $|U_x^c| < \kappa$. Si $|U_x^c| < \kappa$ sea $Z = U_x \cup \{y\}$; entonces $|Z| = \kappa$ y y es un punto aislado en Z. Sea $f : Z \to X$ un homeomorfismo. Entonces $f(y)$ es aislado en X.

Si $|U_x^c| = \kappa$ aplicamos un razonamiento similar al anterior tomando $Z = \{x\} \cup U_x^c$. Así, hemos probado que el conjunto de puntos aislados de X no es vacío. Supongamos que X tenga sólo una cantidad finita de puntos aislados $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y sea $Z = X \setminus \{x_1\}$. Consideremos un homeomorfismo $f : X \to Z$; es claro que $f(x_i)$ es un punto aislado en Z $(i = 1, \ldots, n)$, de manera que Z tiene exactamente n puntos aislados. Además, no es difícil verificar que cada x_i (i=2,...,n) es un punto aislado en Z. Sea $z \in Z$ el otro punto aislado de Z diferente de x_i $(i = 2, \ldots, n)$. Existe un abierto U en X tal que $\{z\} = Z \cap U$. Es decir U es un abierto en X y $U \setminus \{z\} \subseteq Z^c = \{x_1\}$. Si $U \setminus \{z\} = \varnothing$ entonces z sería un punto aislado en X distinto de $\{x_1, \ldots, x_n\}$, lo cual es absurdo. Luego debe verificarse $U \setminus \{z\} = \{x_1\}$ y en consecuencia $U = \{x_1, z\}$. Pero como $\{x_1\}$ es cerrado en X, $\{z\} = U \cap \{x_1\}^c$ es abierto en X, contradiciendo que el conjunto de puntos aislados de X está conformado por $\{x_1, \ldots, x_n\}$. □

Como una consecuencia de lo anterior podemos deducir que todo espacio de Toronto T_2 de cardinalidad numerable es discreto, lo cual forma parte del folklore del tema y es mencionado en [3], aunque no se dá allí ninguna prueba.

Corolario 2. *Todo espacio de Toronto T_2 de cardinalidad ω es discreto.*

Demostración: Sea X un espacio de Toronto T_2 de cardinalidad ω. Por la proposición anterior X tiene infinitos puntos aislados. Sea Y el conjunto de puntos aislados del espacio; obviamente $|Y| = \omega$. Luego como $Y \cong X$ se concluye que todo punto en X es un punto aislado y en consecuencia X es discreto. $\square$

Como en un espacio T_2 todo punto aislado es simultáneamente abierto y cerrado se tiene:

Corolario 3. *Ningún espacio de Toronto infinito y* T_2 *es conexo.*

Proposición 4. *Sea X un espacio de Toronto* T_2 *de cardinalidad regular $\kappa \geq \omega$. Entonces cada componente conexa de X consta de un solo punto, es decir que X es totalmente disconexo.*

Demostración: Si alguna componente conexa de X tuviese cardinalidad κ entonces X sería conexo, contradiciendo el corolario 3. Por lo tanto cada componente conexa debe tener cardinalidad $< \kappa$, y la familia $\mathcal{F}$ de todas ellas debe entonces tener cardinalidad κ. En virtud de la afirmación anterior podemos escribir $\mathcal{F} = \{C_\alpha : \alpha \in \kappa\}$. Tomemos ahora un elemento x_α en cada componente conexa C_α y sea $Z = \{x_\alpha : \alpha \in \kappa\}$. Notemos que si $C \subseteq Z$ es conexo en Z entonces también es conexo en X (si no lo fuese entonces existirían abiertos G_1 y G_2 en X tales que $C \subseteq G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2 = \varnothing$ y $C \cap G_i \neq \varnothing$ $(i = 1, 2)$; en consecuencia tendríamos $C = C \cap Z \subseteq (G_1 \cap Z) \cup (G_2 \cap Z)$ y $G_i \cap Z \neq \varnothing$ $(i = 1, 2)$, lo cual contradice el hecho de que C es conexo en Z). Afirmamos que C consta de un solo punto. En efecto, si $\{x_\alpha, x_\beta\} \subseteq C$ tendríamos, como C es conexo en X, que $C \subseteq C_\xi$ para algún $\xi < \kappa$, de lo cual se sigue $\alpha = \beta = \xi$, es decir que C consta de un solo punto. Ahora bien, como $|Z| = \kappa$ y X es de Toronto, existe un homeomorfismo $f : X \to Z$. Luego, para cada $\alpha \in \kappa$, $f(C_\alpha)$ es un conexo en Z y por lo anteriormente demostrado debe constar de un único punto. Y como f es una biyección se concluye que C_α consta de un solo punto. $\square$

Teorema 1. *Sea X un espacio de Toronto* T_2 *de cardinalidad ω_1. Entonces el conjunto Y de puntos aislados de X es denso en X. En particular si X no es discreto entonces Y es denso y numerable.*

Demostración: En virtud de la Proposición 1 el conjunto Y es infinito. Sea Z la clausura de Y. Si $|Z| = \omega$ entonces $|X \setminus Z| = |X|$ y por ser X de Toronto sería $X \setminus Z \cong X$. Por lo tanto $X \setminus Z$ debe contener un punto aislado, que por ser Z cerrado lo será tambien en X, lo cual es absurdo. En consecuencia debe ser $|Z| = |X|$ y entonces, por ser X de Toronto, será $Z \cong X$. Sea $f : Z \to X$ un homeomorfismo. Entonces

$$X = f(Z) = f(\mathrm{cl}(Y)) = \mathrm{cl}(f(Y)) \subseteq \mathrm{cl}(Y) = Z$$

y por lo tanto $X = Z$, probando que Y es denso en X. Observemos que de hecho Y es el menor conjunto denso de X (respecto a la inclusión), ya que los puntos aislados pertenecen a todo conjunto denso.

Si Y no es numerable entonces $|Y| = |X|$ y por ser X un espacio de Toronto tendríamos $Y \cong X$, resultando X discreto. Por lo tanto si X no es discreto Y debe ser numerable. □

3 Agradecimientos

Al Profesor Franklin Tall, quién despertó en una de sus charlas nuestro interés y curiosidad por el tema, y al Profesor Carlos Di Prisco, por sus múltiples e invalorables sugerencias y comentarios.

Referencias

[1] Kelley, J. *General Topology*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1955.

[2] Kunen, K. *Set theory*, North-Holland, Amsterdam, 1980.

[3] Van Mill, J., Reed, G. M. *Open Problems in Topology*, North Holland, Amsterdam, 1990.