Divulgaciones Matemáticas Vol. 12 No. 2(2004), pp. 155–160

Principio del Módulo Máximo para Series de Potencias en un Álgebra de Banach

Maximum Module Principle for Power Series on a Banach Algebra

Arnoldo Bezanilla L. (abeza@fcfm.buap.mx)
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Ciudad Universitaria
72570 Puebla, México

Roberto Contreras J. (rcjuarez@cs.buap.mx)
Instituto de Estudios Superiores A. C.
Dpto. de Investigación, Ciencias de la Computación
7 Oriente 2402, Col. Azcarate
C. P. 72000, Puebla, México

Resumen

Esta nota esta relacionada con el problema general de extensión de la teoría clásica de funciones analíticas de una variable compleja. Aqui, presentamos una prueba del principio clásico del módulo máximo para series de potencias definidas sobre un álgebra de Banach unitaria.
Palabras y frases clave:

Abstract

The present paper is concerned with the general problem of extending the clasical theory of analytic functions of a Complex variable. A proof of the maximum module principle for powers series defined on Banach algebras is given here.
Key words and phrases:

Recibido 2004/03/09. Revisado 2004/09/27. Aceptado 2004/10/01.
MSC (2000): Primary 32A05, 32A65, 32B50.

1 Introducción

Una propiedad de las funciones analíticas de una variable compleja, es aquella que afirma que si $f(z)$ es analítica en un dominio D de $\mathbb{C}$, se puede escribir como una serie de potencias en una vecindad de cada punto de D. En particular, si $f(z)$ es una función entera

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

con

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Para el caso de funciones definidas sobre álgebras de Banach conmutativas unitarias, E. R. Lorch ha introducido un concepto de diferenciabilidad que extiende al concepto dado para funciones de una variable compleja (ver [4]). Las funciones que son diferenciables en el sentido de Lorch en cada elemento de un dominio Ω del álgebra de Banach conmutativa, se llaman L-analíticas en Ω. Las funciones L-analíticas, tambien tienen un desarrollo en series de Taylor (ver [2] pág. 770). En particular si $F(w)$ es L-analítica en toda el álgebra de Banach, se llama L-entera y satisface

$$F(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n,$$

para a_n en el álgebra de Banach y $\|a_n\|^{\frac{1}{n}} \to 0$ si $n \to \infty$.

Desafortunadamente, para funciones definidas sobre álgebras de Banach unitarias no conmutativas, no se tiene un concepto de diferenciabilidad como el introducido por E. R. Lorch o aquel existente para funciones de una variable compleja. Esto nos lleva a introducir el siguiente concepto.

Definición 1 Sea $\mathbb{B}$ un álgebra de Banach unitaria no necesariamente conmutativa. Una serie de potencias sobre $\mathbb{B}$, es una función $F : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ de la forma

$$F(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n, \qquad w \in \mathbb{B} \tag{1}$$

con $\|a_n\|^{\frac{1}{n}} \to 0$ si $n \to \infty$.

Denotaremos la unidad de $\mathbb{B}$ por $1_{\mathbb{B}}$. Al igual que en campo complejo, un subconjunto Ω del álgebra de Banach $\mathbb{B}$ es un dominio, si es abierto y conexo.

En [2] se da una extensión del teorema del módulo máximo a funciones definidas sobre espacios de Banach que son diferenciables en el sentido de Gâteaux. En esta nota probaremos de forma directa una versión del teorema del módulo máximo para series de potencias definidas sobre un álgebra de Banach unitaria.

Proposición 1. *Sean $w_0, w \in \mathbb{B}$ y F una serie de potencias. Entonces para cualquier $r > 0$*

$$F(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(w + re^{i\theta} w_0) d\theta.$$

Demostración: Basta probar que

$$w^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(w + re^{i\theta} w_0\right)^n d\theta.$$

Para probar esto, utilizamos inducción matemática sobre n. Si $n = 1$, entonces

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(w + re^{i\theta} w_0\right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} re^{i\theta} w_0 d\theta \\ &= w + 0 = w. \end{aligned}$$

Supongamos que para n es válido, entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(w+re^{i\theta}w_0\right)^{n+1}d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(w+re^{i\theta}w_0\right)\left(w+re^{i\theta}w_0\right)^{n}d\theta \\
&= w\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(w+re^{i\theta}w_0\right)^{n}d\theta \\
&\quad +\frac{rw_0}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i\theta}\left(w+re^{i\theta}w_0\right)^{n}d\theta \\
&= w\cdot w^n+0=w^{n+1}
\end{aligned}
$$

y como

$$
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(w+re^{i\theta}w_0\right)^{n}\right\}d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(w+re^{i\theta}w_0\right)^{n}\right\}d\theta,
$$

el resultado se sigue. □

2 Teorema del Módulo Máximo

Proposición 2. *Sean $\mathbb{B}$ un álgebra de Banach unitaria, Ω un dominio acotado de $\mathbb{B}$ y F una serie de potencias. Entonces $\|F(w)\|$ no alcanza su máximo en Ω, salvo que sea constante.*

Demostración: Supónga que existe un $w_0 \in \Omega$ tal que $\|F(w_0)\| \geq \|F(w)\|$ para todo $w \in \Omega$. Tomemos $r > 0$ suficientemente pequeño tal que la bola $B(w_0, r) \subset \Omega$, lo cual es posible por que Ω es un dominio. Con este $r > 0$, formemos el conjunto

$$\Delta = \{w_0 + e^{i\theta}w : 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ y } w \in B(0, r)\}.$$

Notemos que $\Delta = B(w_0, r)$, además por la Proposición 1,

$$F(w_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(w_0 + e^{i\theta}w)d\theta$$

para todo $w \in B(0,r)$ fijo. De aquí,

$$\|F(w_0)\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\|F(w_0+e^{i\theta}w)\right\| d\theta,$$

por lo que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\{\|F(w_0)\| - \left\|F(w_0+e^{i\theta}w)\right\|\right\} d\theta \leq 0$$

para todo $w \in B(0,r)$ fijo.

Por otro lado, $w_0 + e^{i\theta}w \in B(w_0,r)$, para todo $\theta \in [0,2\pi]$ y todo $w \in B(0,r)$, así que

$$\|F(w_0)\| - \left\|F(w_0+e^{i\theta}w)\right\| \geq 0$$

de donde,

$$\|F(w_0)\| = \left\|F(w_0+e^{i\theta}w)\right\|$$

para todo $\theta \in [0,2\pi]$ y todo $w \in B(0,r)$. Es decir,

$$\|F(w_0)\| = \|F(w')\|$$

para todo $w' \in B(w_0,r)$.

Esto muestra que el conjunto $\{w : \|F(w_0)\| = \|F(w)\|\}$ es abierto y como F es continua es cerrado. Pero Ω es conexo, entonces $\|F(w_0)\| = \|F(w)\|$ para todo $w \in \Omega$. □

Proposición 3. *Sean $\mathbb{B}$ un álgebra de Banach unitaria, Ω un dominio acotado de $\mathbb{B}$ y F una serie de potencias. Suponga que $\sup_{w\in\partial\Omega} \|F(w)\| = M$, entonces $\|F(w)\| < M$ en Ω o $\|F(w)\| \equiv M$ sobre Ω.*

Demostración: Sea $a \in \Omega$. Consideremos el conjunto $\Omega_a = \{x = a + z1_{\mathbb{B}} : z \in \mathbb{C}\} \cap \Omega$. Es claro que $\Omega_a \neq \emptyset$. Con Ω_a tenemos asociado un subconjunto abierto Δ de $\mathbb{C}$,

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : a + z1_{\mathbb{B}} \in \Omega\}.$$

Tomemos la componente Δ_0 de Δ que contiene a $z = 0$. Se tiene que $F(a+z1_{\mathbb{B}})$ es analítica respecto a z y por tanto continua en $\overline{\Delta}_0$, de hecho,

$$F'(a+z1_{\mathbb{B}}) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n(a+z1_{\mathbb{B}})^{n-1}.$$

Notemos que si $z \in \partial\Delta$, entonces $a+z1_{\mathbb{B}} \in \partial\Omega$, por ello $\|F(a+z1_{\mathbb{B}})\| \leq M$. Entonces por el principio del módulo máximo para funciones analíticas de una variable compleja,

$$\sup_{\overline{\Delta}_0} \|F(a+z1_{\mathbb{B}})\| \leq \sup_{\overline{\Delta}} \|F(a+z1_{\mathbb{B}})\| \leq \sup_{\partial\Delta} \|F(a+z1_{\mathbb{B}})\|,$$

de aquí,

$$\|F(a)\| \leq M.$$

Como a fue arbitraria en Ω, $\|F(w)\| \leq M$ para todo $w \in \Omega$. Si $\|F(w)\| = M$, aplicamos la Proposición 2 y concluimos que $\|F(w)\| \equiv M$ en Ω. $\square$

Referencias

[1] Bezanilla López, A. *Sobre el Comportamiento Asintótico y el orden de Series de Potencias convergentes en un Álgebra de Banach.* Revista Ciencias Matemáticas, **Vol. XIII, No. 3** (1993) 35 – 46.

[2] Einar Hille and Ralph S. Phillips. *Functional Analysis and Semi-groups.* American Mathematical Society, Colloquium Publications, **Vol XXXI**, 1957.

[3] Holland, A. S. B. *Introduction to the Theory of Entire Functions.* Academic Press, New York, 1973.

[4] Lorch, E. R. *The Theory of Analytic Functions in Normed Abelian Vector Rings.* Trans. Amer. Math. Soc., **54** (1943) 414 – 425

[5] Zhang Guan-Hou. *Theory of Entire and Meromorphic Functions. Deficient and Asymptotic Values and Singular Directions.* American Mathematical Society, Trans. Math. Monographs, **Vol. 122**, 1993.