Balade en Analyse non standard sur les traces de A. Robinson

André Pétry

En 1961 A. Robinson ([15]) introduit l'Analyse non standard et répond ainsi positivement à la question : comment développer de façon cohérente la notion de quantité infinitésimale introduite par G.W. Leibniz aux environs de 1690 et comment développer l'Analyse sur cette base ? La constructrion de A. Robinson et les adaptations qu'on en fit par la suite utilisent des procédés de Logique Mathématique et plus particulièrement de Théorie des Modèles. Le Theorème de compacité ou les ultrapuissances (ce que nous utiliserons ici) sont à la base de cette construction. En général ces techniques permettent d'obtenir des modèles qualifiés de *non standard*, en particulier des modèles non standard de l'Arithmétique (le premier modèle non standard de l'Arithmétique fut obtenu en 1934 par T. Skolem, un tel modèle contient des nombres naturels supérieurs à tous les naturels concrets $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$). Voilà pourquoi A. Robinson choisit l'expression 'Analyse non standard'. Il existe une présentation axiomatique de l'Analyse non stanbard due à E. Nelson ([13]), cette présentation appelée *Internal Set Theory* ne sera pas traitée ici (à son sujet on peut notamment consulter [7],[14]).

Dans les cinq premiers paragraphes on développe les notions de base dans le cadre 'limité' d'une ultrapuissance des réels, c'est seulement au paragraphe 6 qu'on rencontre la situation générale d'un univers non standard au travers des ultrapuissances bornées.

Au paragraphe 1 on étend le champ $\mathbb{R}$ des réels pour obtenir une extension $^*\mathbb{R}$ dont les éléments sont appelés hyperréels ; on montre ensuite que dans $^*\mathbb{R}$ chaque réel est entouré de quantités infiniment proches. La construction (une ultrapuissance) nécessite un ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N}$ ou, ce qui est équivalent, une '*mesure sur* $\mathbb{N}$'.

Les ensembles et fonctions standard de $^*\mathbb{R}$ sont définies au paragraphe 2, on peut alors formuler une première version du Principe de transfert. Ce résultat essentiel traduit de façon cohérente le principe formulé par G.W. Leibniz selon lequel

> *le système obtenu en ajoutant aux quantités réelles des quantités idéales infiniment proches et des quantités infiniment grandes, jouissait des mêmes 'propriétés' que le système formé par les seules quantités réelles.*

1991 *Mathematics Subject Classification :* 26E35, 03H05, 28E05.
Key words and phrases : nonstandard analysis, Loeb measure.

Formulé de la sorte, ce principe est incohérent (ce que savait bien entendu Leibniz), cet aspect contradictoire est éliminé par la construction effectuée mais aussi parce qu'on précise ce qu'il faut entendre par '*propriété*' ; l'implication de la Logique apparaît ici clairement. On a ainsi les outils nécessaires pour traiter de la continuité et des dérivées de fonctions réelles, c'est ce qu'on envisage au paragraphe 3.

Les ensembles et fonctions internes de $^*\mathbb{R}$ sont introduits au paragraphe 4, ce sont les *bons* ensembles de l'Analyse non standard. Le paragraphe 5 concerne un type particulier d'ensembles internes : les ensembles hyperfinis; nous utilisons ceux-ci pour décrire l'intégrale de Riemann. Les ensembles hyperfinis généralisent la notion d'ensembles finis et permettent d'élargir le champ d'application des arguments finitaires, ils constituent un outil novateur essentiel de l'Analyse non standard.

Au paragraphe 6 on rencontre la situation générale : on décrit la construction d'une ultrapuissance bornée, une telle structure constitue un univers non standard et permet de développer toutes les notions rencontrées en Analyse. Les ensembles internes et standard sont alors vus de façon générale.

Les méthodes non standard peuvent être appliquées à des espaces topologiques quelconques, cela nécessite cependant des conditions supplémentaires concernant l'ultrafiltre ou la mesure considérée, afin d'éviter de telles conditions on se limite au paragraphe 7 à considérer le cas des espaces métriques pour lesquels les notions topologiques élémentaires sont caractérisées.

Au travers de ces paragraphes des formulations non standard de notions classiques sont données, quelques résultats bien connus sont redémontrés en utilisant des arguments non standard. Cependant l'Analyse non standard ne se limite pas à donner une autre présentation de l'Analyse dite 'classique'. Elle a permis de résoudre des problèmes jusqu'alors ouverts. L'Analyse non standard apporte une approche novatrice dans certaines disciplines, notamment dans l'étude des espaces de Banach, des équations différentielles et aussi, au moyen des mesures de Loeb, en Théorie de la mesure et des probabilités. A ce propos on se limite ici à introduire au paragraphe 8 les mesures de Loeb et on montre sur un exemple comment elles permettent de représenter de nombreuses mesures classiques.

La bibliographie mentionne quelques références générales ([6], [9], [10], [11] et [4] qui offre un panorama particulièrement complet au travers des différents articles qui le composent), ainsi que quelques références traitant de sujets plus particuliers ([1], [2], [3], [17], [18]). On trouvera dans [11] une bibliographie détaillée.

Définitions et notations. L'ensemble des naturels $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ est noté $\mathbb{N}$. Si A, B sont des ensembles, $A \setminus B$ représente le complémentaire de B dans A et $S(A)$ est l'ensemble des parties de A. Le couple (x, y) utilisé est le couple classique de Kuratowski, autrement dit $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Les suites sont des fonctions de domaine $\mathbb{N}$ et sont simplement notées (x_i), $(A_i) \ldots$; une famille $(a_i)_{i \in I}$ est identifiée à la fonction $i \in I \mapsto a_i$. Par fonction réelle on entendra une fonction dont le domaine est une partie de $\mathbb{R}$ et dont les valeurs sont aussi des réels.

1 Les hyperréels

La construction des hyperréels utilise un ultrafiltre non principal ou ce qui est équivalent une 'mesure' définie comme ci-dessous.

Définition 1 *μ est une mesure sur $\mathbb{N}$ lorsque μ est une fonction définie sur l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, prenant uniquement les valeurs 0 ou 1 et telle que :*

1. $\mu(\mathbb{N}) = 1$,
2. $\mu(X) = 0$ *pour toute partie finie X de $\mathbb{N}$* ,
3. $\mu(X \cup Y) = \mu(X) + \mu(Y)$ *pour toutes parties X, Y de $\mathbb{N}$ telles que $X \cap Y = \emptyset$* .

μ est donc une mesure finiment additive sur $S(\mathbb{N})$ mais n'est évidemment pas σ-additive. On obtient immédiatement :

Proposition 1 *Soient μ une mesure sur $\mathbb{N}$ et X, Y, X_k des parties de $\mathbb{N}$.*

1. $X \subset Y$ *entraîne* $\mu(X) \leqslant \mu(Y)$;
2. $\mu(X) = 0$ *si et seulement si* $\mu(\mathbb{N} \setminus X) = 1$;
3. $\mu(X \cup Y) = \mu(X) + \mu(Y) - \mu(X \cap Y)$;
4. $\mu(X) = \mu(Y) = 1$ *entraîne* $\mu(X \cap Y) = 1$;
5. *si la mesure d'une union d'un nombre fini de X_k vaut 1, la mesure d'un des X_k vaut nécessairement 1 .*

Une application μ de l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ vers $\{0, 1\}$ est une mesure sur $\mathbb{N}$ si et seulement si $\{X : X \subset \mathbb{N}$ et $\mu(X) = 1\}$ est un ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N}$ (un ultrafiltre D sur I est principal lorsqu'il existe $a \in I$ tel que $D = \{X : a \in X$ et $X \subset I\}$) . Or l'existence d'ultrafiltres non principaux est assurée moyennant l'Axiome du choix, et même, étant donnée une partie infinie A de I, on sait qu'il existe un ultrafiltre non principal D sur I tel que $A \in D$. Nous admettons ici l'Axiome du choix et par conséquent il existe des mesures sur $\mathbb{N}$. Dès maintenant on fixe une mesure μ sur $\mathbb{N}$.

La construction de l'ensemble ${}^*\mathbb{R}$ des hyperréels rappelle la construction des réels au moyen des suites de Cauchy de rationnels : on considère une relation d'équivalence $\sim$ bien particulière sur l'ensemble des suites de réels et ${}^*\mathbb{R}$ est l'ensemble quotient correspondant. Vu la proposition 1 la relation $\sim$ ci-dessous est bien une équivalence.

Définition 2

1. *si (x_i) , (y_i) sont des suites de réels, $(x_i) \sim (y_i)$ lorsque $\mu(\{i : x_i = y_i\}) = 1$.*
2. $< x_i >$ *représente la classe d'équivalence de (x_i) modulo $\sim$.*
3. ${}^*\mathbb{R}$ *est l'ensemble quotient de l'ensemble des suites de réels par $\sim$, les* **hyperréels** *sont les éléments de ${}^*\mathbb{R}$.*
4. *Si $a \in \mathbb{R}$, ${}^*a$ représente la classe d'équivalence de la suite dont tous les termes sont égaux à a .*

Notons $\mathcal{L}$ le langage obtenu en ajoutant au langage de la théorie des champs ordonnés $\{=, +, \cdot, \leqslant, \underline{0}, \underline{1}\}$ un symbole constant $\underline{r}$ pour chaque réel r autre que 0 et 1 ; notons $\mathcal{R}$ le champ ordonné des réels où chacun des symboles $\underline{r}$ est interprété par r.
Définissons sur ${}^*\mathbb{R}$ une structure associée au langage $\mathcal{L}$, pour ce faire définissons

$< x_i > + < y_i > = < x_i + y_i >$, $< x_i > \cdot < y_i > = < x_i \cdot y_i >$,

$< x_i > \leqslant < y_i > \Longleftrightarrow \mu\{i : x_i \leqslant y_i\} = 1$,

et, pour chaque $a \in \mathbb{R}$ interprétons $\underline{a}$ par ${}^*a$; notons ${}^*\mathcal{R}$ la structure ainsi obtenue. Cela est bien cohérent car ces définitions sont indépendantes des suites choisies dans les classes d'équivalence. En fait nous venons ainsi d'appliquer à la structure $\mathcal{R}$ une construction générale de la Théorie des modèles : ${}^*\mathcal{R}$ est l'*ultrapuissance* de $\mathcal{R}$ modulo l'ultrafiltre associé à la mesure μ.

Les ultrapuissances constituent un cas particulier des ultraproduits (voir par exemple [5]) et tous les ultraproduits vérifient un résultat important à savoir le Théorème de Łoś . Avant de formuler ce résultat il faut préciser quelles sont les propositions ou plus précisément les *formules* considérées dans le langage $\mathcal{L}$: les formules sont construites au départ des symboles de $\mathcal{L}$ en utilisant des variables, les opérateurs propositionnels classiques (non, et, ou, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$) et les quantificateurs universels et existenciels ($\forall$, $\exists$). Rappelons : une variable v est dite *liée* dans une formule φ si elle y apparaît sous une des formes $\forall v$, $\exists v$; une variable de φ est dite *libre* lorsqu'elle n'est pas liée, un *énoncé* est une formule dont toutes les variables sont liées; la notation $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ signifie que les variables libres de la formule φ sont parmi les variables $x_1, \ldots, x_n$. Par exemple dans la formule

$$(\exists x)(\underline{2} < x \text{ et } x < y)$$

x est liée et y est libre.
Précisons aussi : si $\mathfrak{A} = < A\,,\ +_{\mathfrak{A}}\,,\ \cdot_{\mathfrak{A}}\,,\ \leqslant_{\mathfrak{A}}\,,\ r_{\mathfrak{A}} \ :\ r \in \mathbb{R} >$ est une structure correspondant au langage $\mathcal{L}$ et définie sur un ensemble A (ici A est $\mathbb{R}$ ou ${}^*\mathbb{R}$), si $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ est une formule de $\mathcal{L}$ et si $b_1, \ldots, b_n$ sont des éléments de A, alors

$\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *est vrai dans* $\mathfrak{A}$ *en* $b_1, \ldots, b_n$, en abrégé $\mathfrak{A} \models \varphi[b_1, \ldots, b_n]$,

signifie que la proposition obtenue en remplaçant dans $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$

$+$, $\cdot$, $\leqslant$, $\underline{r}$ respectivement par $+_{\mathfrak{A}}$, $\cdot_{\mathfrak{A}}$, $\leqslant_{\mathfrak{A}}$, $r_{\mathfrak{A}}$,

$x_1, \ldots, x_n$ respectivement par $b_1, \ldots, b_n$,

$\forall x$, $\exists x$ respectivement par $\forall x \in A$, $\exists x \in A$,

est vraie.
On ne considère donc que des formules du premier ordre c'est-à-dire des formules où les variables représentent uniquement des éléments de la structure considérée. Par exemple, la proposition selon laquelle $\mathfrak{A}$ est un corps s'exprime au moyen d'un nombre fini d'énoncés du langage $\mathcal{L}$; ainsi, dire que tout élément de A différent de $0_{\mathfrak{A}}$ a un inverse pour l'opération $\cdot_{\mathfrak{A}}$ est équivalent à dire que l'énoncé

$$(\forall x)(x \neq \underline{0} \Longrightarrow (\exists y)(x \cdot y = y \cdot x = \underline{1}))$$

est vrai dans $\mathfrak{A}$. Nous ne pouvons considérer ici de formules où apparaîtraient $\forall X \subset A, \exists X \subset A$; par exemple on ne peut exprimer au moyen d'un énoncé de $\mathcal{L}$ la proposition selon laquelle toute partie non vide de $\mathbb{R}$ bornée supérieurement a une borne supérieure.

Dans le cas particulier considéré, le Théorème de Łoś s'énonce :

Théorème 2 *Pour toute formule $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ du langage $\mathcal{L}$, pour tout $< a_i^1 >, \cdots, < a_i^n > \in {}^*\mathbb{R}$,*

$$^*\mathcal{R} \models \varphi[< a_i^1 >, \cdots, < a_i^n >] \text{ si et seulement si } \mu(\{i \;:\; \mathcal{R} \models \varphi[a_i^1, \cdots, a_i^n]\}) = 1\ .$$

Démonstration La preuve de ce résultat s'effectue par induction sur la longueur de la formule φ. Envisageons deux cas significatifs de cette récurrence :
1) considérons la formule $x_1 + x_2 = x_3$,

$$\begin{aligned} < a_i^1 > + < a_i^2 > = < a_i^3 > &\iff < a_i^1 + a_i^2 > = < a_i^3 > \\ &\iff \mu(\{i \;:\; a_i^1 + a_i^2 = a_i^3\}) = 1\ . \end{aligned}$$

2) soit $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ la négation de $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, alors

$$\begin{aligned} ^*\mathcal{R} \models \varphi[< a_i^1 >, \ldots, < a_i^n >] &\iff \text{non } {}^*\mathcal{R} \models \psi[< a_i^1 >, \ldots, < a_i^n >] \\ &\iff \mu(\{i \;:\; \mathcal{R} \models \psi[a_i^1, \ldots, a_i^n]\}) = 0 \\ &\iff \mu(\mathbb{N} \setminus \{i \;:\; \mathcal{R} \models \psi[a_i^1, \ldots, a_i^n]\}) = 1 \\ &\iff \mu(\{i \;:\; \mathcal{R} \models \varphi[a_i^1, \ldots, a_i^n]\}) = 1\ . \end{aligned}$$

■

En envisageant le cas des énoncés de $\mathcal{L}$ on obtient une première version du Principe de transfert traduisant de façon cohérente le principe déjà formulé par Leibniz dont il a déjà été question.

Corollaire 1 *Tout énoncé du langage $\mathcal{L}$ est vérifié dans $\mathcal{R}$ si et seulement s'il est vrai dans $^*\mathcal{R}$.*

En particulier $^*\mathcal{R}$ est un champ ordonné dont $\{^*x \;:\; x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-corps isomorphe à $\mathcal{R}$. Dès lors **on identifie chaque réel** r **avec** $^*r$ et $^*\mathbb{R}$ apparaît comme une extension des réels. $|x|$ est donc défini pour tout hyperréel x et on voit aisément que $| < x_i > | = < |x_i| >$.

Définition 3 *Soit a un hyperréel.*
- *a est* **infiniment petit** *lorsque $|a| < r$ pour tout réel $r > 0$;*
- *a est* **infiniment grand** *(ou illimité) lorsque $|a| > r$ pour tout réel r ;*
- *a est* **limité** *lorsque a n'est pas infiniment grand;*
- *a est* **appréciable** *lorsque a est limité et non infiniment petit.*

Le résultat fondamental est évidemment l'existence d'infiniment petits non nuls.

Théorème 3 *Si* (x_i) *est une suite de réels non nuls de limite* 0*, l'hyperréel* $< x_i >$ *est un infiniment petit non nul.*

Démonstration Soient $\lim x_i = 0$ et $x_i \neq 0$ pour tout i. Posons $a =< x_i >$. $a \neq 0$ car $\mu(\{i \ : \ x_i = 0\}) = \mu(\emptyset) = 0$. Soit r un réel > 0. L'ensemble $\{i \ : \ |x_i| \geqslant r\}$ est fini et a donc sa mesure nulle, par conséquent $\mu(\{i \ : \ |x_i| < r\}) = 1$ d'où $|a| < r$. ■

Par exemple $< \frac{1}{i+1} >$, $< \frac{1}{2^i} >$ ...sont des infiniment petits > 0. On déduit aisément les règles concernant les sommes, produits et inverses résumées dans les tableaux suivants, '?' indiquant un cas d'indétermination.

Somme	inf.petit	inf.grand	limité
inf.petit	inf.petit		
inf.grand	inf.grand	?	
limité	limité	inf.grand	limité

Produit	inf.petit	appréciable	inf.grand
inf.petit	inf.petit		
appréciable	inf.petit	appréciable	
inf.grand	?	inf.grand	inf.grand

	inf.petit	appréciable	inf.grand
Inverse	inf.grand	appréciable	inf.petit

Définition 4
1. *Soient* $a, b \in {}^*\mathbb{R}$*,* a *est* **infiniment proche** *de* b *(en abrégé* $a \approx b$ *) lorsque* $a - b$ *est infiniment petit ;*
2. *Si* $r \in \mathbb{R}$*, la* **monade** *de* r *ou le* **halo** *de* r *est l'ensemble* $\{x \in {}^*\mathbb{R} \ : \ x \approx r\}$*.*

Théorème 4 *Tout hyperréel limité est infiniment proche d'un et d'un seul réel qui est appelé la* **partie standard** *de* a *et est noté* $\mathrm{st}(a)$*.*

Démonstration L'unicité découle de ce que le seul réel qui soit un infiniment petit est 0. Prouvons l'existence : soit a limité, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leqslant a\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et bornée supérieurement, elle admet donc dans $\mathbb{R}$ une borne supérieure b. Soit r un réel > 0, alors $b + r > a$ et $b - r < a$ d'où $|a - b| < r$. $a - b$ est donc infiniment petit et $a \approx b$. ■

Les hyperréels limités sont donc exactement les hyperréels qui se trouvent dans les halos des réels. Des règles ci-dessus il découle

Proposition 5 *Soient* a*,* b *des hyperréels limités.*
1. $\mathrm{st}(a + b) = \mathrm{st}(a) + \mathrm{st}(b)$, $\mathrm{st}(a \cdot b) = \mathrm{st}(a) \cdot \mathrm{st}(b)$ *et* $\mathrm{st}(a/b) = \mathrm{st}(a)/\mathrm{st}(b)$ *si* $\mathrm{st}(b) \neq 0$*;*
2. $a < b$ *entraîne* $\mathrm{st}(a) \leqslant \mathrm{st}(b)$*.*

En fait l'ensemble L des hyperréels limités est un anneau intègre qui a comme idéal maximal l'ensemble IP des infiniment petits, la fonction st est un morphisme surjectif de L sur $\mathbb{R}$ et le quotient L/IP est isomorphe au corps des réels.

Revenons à l'analogie entre la définition de $\mathbb{R}$ et de ${}^*\mathbb{R}$ pour distinguer une différence importante : deux suites de Cauchy de rationnels ayant la même limite réelle définissent le même réel, par contre deux suites de réels ayant la même limite réelle r vont définir des hyperréels infiniment proches de r et qui pourront être différents. Ainsi dans la construction des hyperréels on tient compte non seulement de la limite éventuelle de la suite mais aussi de la façon dont la suite converge. Par exemple, soient $(x_i), (y_i)$ des suites de réels $\neq r$ et convergeant vers r, notons $a =< x_i >$, $b =< y_i >$, alors $a \approx b \approx r$, $a \neq r$, $b \neq r$ et en plus

si à partir d'un certain indice $x_i < y_i$, on a $a < b$,

si $(x_i - r)/(y_i - r) \to 0$, le rapport $(a - r)/(b - r)$ est un infiniment petit.

2 Principe de transfert

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On étend A en une partie ${}^*A$ de ${}^*\mathbb{R}$ définie comme suit :

$$< x_i >\in {}^*A \Longleftrightarrow \mu(\{i \,:\, x_i \in A\}) = 1\ . \tag{1}$$

Remarquons que les éléments de ${}^*A$ peuvent s'écrire $< x_i >$ où chaque $x_i \in A$. En effet, si $A \neq \emptyset$ et si on choisit u dans A, tout élément w de ${}^*A$ est de la forme $< v_i >$ où la mesure de $J = \{i \,:\, v_i \in A\}$ vaut 1, modifions alors la suite (v_i) en posant

$$x_i = \begin{cases} v_i & \text{si } i \in J \\ u & \text{si } i \notin J \end{cases} ,$$

alors $w =< x_i >$.

Chaque partie A de $\mathbb{R}$ s'étend donc en une partie ${}^*A$ de ${}^*\mathbb{R}$ dont la restriction à $\mathbb{R}$ est A. Par exemple, si $a,\ b \in \mathbb{R}$ et $a < b$, ${}^*[a, b]$ est l'intervalle $\{x \in {}^*\mathbb{R} \,:\, a \leqslant x \leqslant b\}$.

L'ensemble $\mathbb{N}$ des naturels s'étend aussi en un ensemble ${}^*\mathbb{N}$, les éléments de ${}^*\mathbb{N}$ sont appelés **hypernaturels**. La répartition des hypernaturels est simple :

Proposition 6 *Tout hypernaturel est soit un naturel soit un infiniment grand positif.*

Démonstration Soit α un hypernaturel limité. α est de la forme $< n_i >$ où chaque $n_i \in \mathbb{N}$ et il existe un naturel p tel que $\alpha \leqslant p$. Par conséquent l'ensemble $\{i \,:\, n_i \leqslant p\}$ a pour mesure 1, mais cet ensemble est l'union des $p + 1$ ensembles $\{i \,:\, n_i = k\}$ $(k = 0, 1, \ldots, p)$, un de ses ensembles doit donc avoir 1 comme mesure d'où α est un des naturels $0, 1, \ldots, p$. ■

Les hypernaturels forment en fait ce qu'on appelle un modèle non standard de l'Arithmétique de Peano et les hypernaturels infiniment grands sont ce qu'on appelle en Logique mathématique des entiers non standard.

Chaque fonction réelle f de domaine D s'étend aussi en une fonction ${}^*f$ de domaine ${}^*D$ en procédant comme suit : pour chaque $< x_i >\in {}^*D$, on pose

$${}^*f(< x_i >) \ =< y_i > \ \text{ où } y_i = \begin{cases} f(x_i) & \text{si } x_i \in D\,, \\ \ldots\text{(un réel quelconque)} & \text{si } x_i \notin D\,. \end{cases}$$

Il s'ensuit

$$< y_i >= {}^*f(< x_i >) \Longleftrightarrow \mu(\{i \,:\, y_i = f(x_i)\}) = 1\ . \tag{2}$$

Par exemple la fonction sinus s'étend à ${}^*\mathbb{R}$ tout entier par ${}^*\sin(< x_i >) =< \sin x_i >$ (en pratique on ne met pas * devant les extensions des fonctions élémentaires). Les ensembles de la forme ${}^*A$ et les fonctions de la forme ${}^*f$ sont qualifiés de **standard**.

Enrichissons le langage $\mathcal{L}$ de telle sorte à pouvoir exprimer des propositions faisant référence à des parties de $\mathbb{R}$ et à des fonctions réelles ou à leur extension dans ${}^*\mathbb{R}$. Au langage $\mathcal{L}$ ajoutons pour chaque partie A de $\mathbb{R}$ un symbole relationnel $\underline{A}(x)$, et pour chaque fonction réelle f un symbole relationnel $\underline{f}(x, y)$, notons $\mathcal{L}_{\mathrm{st}}$ le langage ainsi obtenu. $\mathcal{R}$ et ${}^*\mathcal{R}$ s'étendent de façon naturelle en des structures de langage $\mathcal{L}_{\mathrm{st}}$ notées respectivement $\mathfrak{R}$, ${}^*\mathfrak{R}$ comme suit :

dans $\mathfrak{R}$, $\underline{a}(x)$, $\underline{f}(x, y)$ signifient respectivement $x \in A$, $y = f(x)$,

dans ${}^*\mathfrak{R}$, $\underline{a}(x)$, $\underline{f}(x, y)$ signifient respectivement $x \in {}^*A$, $y = {}^*f(x)$.

Un retour à la preuve du théorème de Łoś et (1),(2) nous montrent que ce théorème et son corollaire sont encore vérifiés pour les structures $\mathfrak{R}$, ${}^*\mathfrak{R}$. Ainsi :

Théorème 7 (Principe de transfert, cas particulier) *Tout énoncé de $\mathcal{L}_{st}$ est vérifié dans $\mathfrak{R}$ si et seulement s'il est vérifié dans ${}^*\mathfrak{R}$.*

Le Principe de Transfert joue un rôle fondamental. Voici deux exemples en montrant sa force mais aussi ses limites. Les formules trigonométriques classiques restent valables dans ${}^*\mathbb{R}$ car elles s'expriment au moyen d'énoncés du langage $\mathcal{L}_{\mathrm{st}}$, par exemple la formule

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})(\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y))$$

devient

$$(\forall x, y \in {}^*\mathbb{R})({}^*\sin(x + y) = {}^*\sin(x) \cdot {}^*\cos(y) + {}^*\cos(x) \cdot {}^*\sin(y)) \ .$$

Mais à l'opposé de ce qui se passe dans les réels, dans ${}^*\mathbb{R}$ il existe des infiniment petits non nuls, il existe aussi des parties de ${}^*\mathbb{R}$ bornées supérieurement dans ${}^*\mathbb{R}$ et n'admettant pas de borne supérieure (par exemple $\mathbb{R}$, $\{x \ : \ x \text{ limité }\}$). Ces différences portent en fait sur des propositions qu'on ne peut exprimer au moyen d'énoncés de $\mathcal{L}_{\mathrm{st}}$ et auxquelles on ne peut donc appliquer le Principe de transfert.

Soit $A \subset \mathbb{R}$, ${}^*A$ est-il une extension propre de A ? La réponse est simple :

Théorème 8 $A = A^*$ *si et seulement si A est fini.*

En effet si A est une partie finie $\{a_1, \ldots, a_p\}$ de $\mathbb{R}$, on a

$$(\forall x \in \mathbb{R})(x \in A \Longleftrightarrow (x = a_1 \text{ ou } \ldots \text{ ou } x = a_p))$$

d'où, grâce au Principe de transfert,

$$(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(x \in {}^*A \Longleftrightarrow (x = a_1 \text{ ou } \ldots \text{ ou } x = a_p))$$

et donc ${}^*A = A$. Réciproquement, si A est infini, on peut trouver une suite (a_i) d'éléments de A deux à deux différents, alors $< a_i > \in {}^*A$ et $< a_i > \notin A$.

3 Continuité et dérivées

Formulons les notions classiques de limite, de continuité et de dérivées de façon non standard (en gardant les définitions classiques). f représente une fonction réelle de domaine D, A représente une partie de $\mathbb{R}$ et a , r sont des réels.

Proposition 9 *1.* $\lim_{x\to r} f(x) = a$ *ssi* $(\forall x \in {}^*D)\ ((x \approx r \text{ et } x \neq r) \Longrightarrow {}^*f(x) \approx a)$.

2. f *est continue en* r *ssi* $r \in D$ *et* $(\forall x \in {}^*D)\ (x \approx r \Longrightarrow {}^*f(x) \approx f(r))$.

3. f *est uniformément continue dans* A *ssi* f *est définie dans* A *et*

$$(\forall x, y \in {}^*A)\ (x \approx y \Longrightarrow {}^*f(x) \approx {}^*f(y)) .$$

Démonstration Soient $\lim_{x\to r} f(x) = a$, $w \approx r$ et $w \neq r$. Considérons ε un réel > 0 quelconque. Il existe η réel > 0 tel que

$$(\forall u \in D)((|u - r| < \eta \text{ et } u \neq r) \Longrightarrow |f(u) - a| < \varepsilon) . \tag{3}$$

Transférons cette proposition, on obtient :

$$(\forall u \in {}^*D)((|u - r| < \eta \text{ et } u \neq r) \Longrightarrow |{}^*f(u) - a| < \varepsilon) .$$

Puisque $w - r$ est un infiniment petit, $|w - r| < \eta$ d'où $|{}^*f(w) - a| < \varepsilon$. Par conséquent ${}^*f(w) \approx a$.

Réciproquement supposons $(\forall x \in {}^*D)\ ((x \approx r \text{ et } x \neq r) \Longrightarrow {}^*f(x) \approx a)$. Soit ε un réel > 0 . En prenant pour γ un infiniment petit > 0, on a

$$(\forall u \in {}^*D)((|u - r| < \gamma \text{ et } u \neq r) \Longrightarrow |{}^*f(u) - a| < \varepsilon) ,$$

d'où

$$(\exists \eta \in {}^*\mathbb{R})(\eta > 0 \text{ et } (\forall u \in {}^*D)((|u - r| < \eta \text{ et } u \neq r) \Longrightarrow |{}^*f(u) - a| < \varepsilon)) .$$

En transférant cette proposition dans $\mathbb{R}$, on obtient $\lim_{x\to r} f(x) = a$.

Pour prouver la partie concernant la continuité uniforme il suffit de remplacer ci-dessus (3) par $(\forall u, v \in D)\ (|u - v| < \eta \Longrightarrow |f(u) - f(v)| < \varepsilon)$. ■

Par exemple, nous retrouvons que la fonction $1/x$ n'est pas uniformément continue dans $]0, 1]$, en effet si ε est un infiniment petit > 0 on a à la fois $\varepsilon \approx 2\varepsilon$ et $1/\varepsilon - 1/(2\varepsilon)$ infiniment grand. De la proposition 9 il découle :

Proposition 10 f *est dérivable en* r *si et seulement si pour tout* $x \neq r$ *et* $x \approx r$ *la fraction* $\dfrac{{}^*f(x) - f(r)}{x - r}$ *est limitée et a sa partie standard indépendante de* x *; alors pour de tels* x

$$f'(r) = \operatorname{st}\left(\frac{{}^*f(x) - f(r)}{x - r}\right) .$$

Que se passe-t-il si nous considérons le quotient différentiel pour deux hyperréels infiniment proches et distincts ? La réponse donne une caractérisation élégante des fonctions continûment dérivables :

Proposition 11 *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f définie dans I . f est une fonction continûment dérivable dans I ssi pour chaque $r \in I$ il existe un réel d tel que pour tous x, y*

$$(x \approx y \approx r \text{ et } x \neq y) \Longrightarrow \frac{{}^*f(y) - {}^*f(x)}{y - x} \approx d \, .$$

Effectuons la preuve de la condition nécessaire : transférons la conclusion du Théorème des accroissements finis et appliquons-la entre les hyperréels distincts x, y infiniment proches de r , on obtient $\dfrac{{}^*f(y) - {}^*f(x)}{y - x} = {}^*f'(u)$ avec u entre x et y , d'où $\dfrac{{}^*f(y) - {}^*f(x)}{y - x} \approx f'(r)$.

Envisageons la convergence des suites. Remarquons d'abord qu'une suite (x_m) de réels est une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ et s'étend donc en une famille d'hyperréels indicés par tous les hypernaturels : on peut dès lors considérer x_m aussi pour tout hypernaturel m infiniment grand. En raisonnant comme pour les limites de fonctions, on prouve :

Proposition 12 *Si (x_m) est une suite de réels et si r est un réel,*

1. *(x_m) converge vers r ssi pour tout hypernaturel α infiniment grand on a $x_\alpha \approx r$;*
2. *il existe une sous-suite de (x_m) convergeant vers r ssi il existe un hypernaturel α infiniment grand tel que $x_\alpha \approx r$.*

4 Ensembles et fonctions internes

Les ensembles et fonctions internes généralisent les ensembles et fonctions standard.

Définition 5 *Si (A_i) est une suite de parties de $\mathbb{R}$, on note $< A_i >$ l'ensemble des hyperréels $< x_i >$ tels que*

$$\mu(\{i \, : \, x_i \in A_i\}) = 1 \, .$$

Les ensembles de la forme ci-dessus sont appelés **internes**. *Les parties de ${}^*\mathbb{R}$ non internes sont dites* **externes**.

Ainsi tout intervalle de ${}^*\mathbb{R}$ est interne, en effet, si u, v sont les hyperréels $< u_i >$, $< v_i >$ tels que $u < v$, l'intervalle $\{x \in {}^*\mathbb{R} \, : \, u < x < v\}$ est $<]u_i, v_i[>$.

De même on définit les fonctions internes :

Définition 6 *Soit (f_i) une suite de fonctions réelles de domaine D_i . Alors $< f_i >$ représente la fonction de domaine $< D_i >$ définie par :*

$$< f_i > (< x_i >) \; = < y_i > \quad \text{où } \; y_i = \begin{cases} f_i(x_i) & \text{si } x_i \in D_i \, , \\ \ldots (\text{un réel quelconque}) & \text{si } x_i \notin D_i \, . \end{cases}$$

Par exemple, si a est un hyperréel $< a_i >$, la fonction $\cos(ax)$ est interne car elle coïncide avec $< \cos(a_i x) >$.

Les ensembles et fonctions internes conservent une large catégorie de propriétés connues dans $\mathbb{R}$, par exemple :

Proposition 13 *Toute partie interne non vide de* $^*\mathbb{R}$ *bornée supérieurement dans* $^*\mathbb{R}$ *admet une borne supérieure.*

En effet soit $< E_i >$ un ensemble interne borné supérieurement, posons $s_i = \sup E_i$ si E_i est borné supérieurement et prenons pour s_i un réel quelconque si non, alors on vérifie que $< s_i >$ est la borne supérieure de $< E_i >$.

Par conséquent les ensembles $\{x : x$ infiniment petit$\}$, $\{x : x$ limité$\}$, les halos, $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ sont externes car, dans $^*\mathbb{R}$, ils sont bornés supérieurement et n'ont pas de borne supérieure.

Comment construire des ensembles et fonctions internes ? Si A, B sont des ensembles internes, il en est de même de $A \cup B$, $A \cap B$ et de $A \setminus B$ (par exemple $< A_i > \cup < B_i > = < A_i \cup B_i >$) ; tout ensemble formé d'un seul hyperréel est clairement interne et il s'ensuit que toute partie finie de $^*\mathbb{R}$ est interne. Au paragraphe 6 on verra un résultat général (le Principe de définition interne), donnons-en dès maintenant un cas particulier :

Théorème 14 *Soit* $\varphi(x)$ *une formule de* $\mathcal{L}_{st}$ *où en plus on peut utiliser comme paramètre des hyperréels, des ensembles internes ou des fonctions internes. Alors l'ensemble des hyperréels* x *pour lesquels* $\varphi(x)$ *est vrai dans* $^*\mathfrak{R}$*, est un ensemble interne.*

Voici deux outils très souvent utilisés. On sait que toute suite de réels (x_m) s'étend en une famille standard $(x_m)_{m\in {}^*\mathbb{N}}$, de même :

Théorème 15 ($\aleph_1$- compréhension, cas particulier)
Toute suite d'hyperréels (a_m)*, s'étend en une fonction interne* $(a_m)_{m\in {}^*\mathbb{N}}$.

En effet : soit $a_m = < x_i^m >$, notons f_i la fonction définie par

$$f_i \ : \ m \in \mathbb{N} \longmapsto x_i^m \ ,$$

on vérifie que la fonction interne $< f_i >$ étend à $^*\mathbb{N}$ la suite (a_m).

Théorème 16 (Principe de débordement) *Soit* A *une partie interne de* $^*\mathbb{R}$*. Si* A *contient des hyperréels limités arbitrairement grands, alors* A *contient des hyperréels infiniment grands positifs.*

Démonstration Posons $B = \{x \in {}^*\mathbb{R} : x > 0$ et $(\exists y \in A)(x \leqslant y)\}$ Vu le théorème 14, B est un ensemble interne, mais B contient aussi l'ensemble de tous les limités > 0 qui lui est externe. A contient donc un infiniment grand positif. ∎

La démonstration ci-dessus illustre un mode de raisonnement fréquent : un ensemble interne contient un ensemble externe, il contient donc des hyperréels ne se trouvant pas dans cet ensemble externe. Utilisons le Principe de débordement pour prouver :

Proposition 17 (Lemme de Robinson) *Si* (x_m) *est une suite d'infiniment petits, il existe* α *hypernaturel infiniment grand tel que* x_k *soit infiniment petit pour tout hypernaturel* $k \leq \alpha$.

En effet soit $A = \{k \in {}^*\mathbb{N} \ : \ (\forall j \in {}^*\mathbb{N})(j \leq k \Rightarrow |x_j| < 1/j)\}$; vu le théorème 14, A est interne, il suffit dès lors d'appliquer le Principe de débordement à A.

5 Ensembles hyperfinis

Définition 7 *Un ensemble hyperfini* A *est un ensemble interne de la forme* $< A_i >$ *où chaque* A_i *est fini ; alors si* m_i *désigne le nombre d'éléments de* A_i *, l'hypernaturel* $< m_i >$ *est appelé la cardinalité interne de* A *et sera noté* $|A|$ *.*

Toute partie finie de ${}^*\mathbb{R}$ est hyperfinie ; si α est un hypernaturel, l'ensemble $\{k \in {}^*\mathbb{N} \,:\, k \leqslant \alpha\}$ est hyperfini mais aussi :

Proposition 18 *Soient* a, b *des réels tels que* $a < b$ *et* α *un hypernaturel infiniment grand. Notons* x_k *les hyperréels obtenus en partageant* $[a, b]$ *en* α *parties égales, de façon plus précise posons*

$$x_k \;=\; a + k\frac{b-a}{\alpha} \text{ pour } k \in {}^*\mathbb{N} \text{ et } k \leqslant \alpha\,. \tag{4}$$

Alors l'ensemble $\{x_k \,:\, k \in {}^*\mathbb{N} \text{ et } k \leqslant \alpha\}$ *est hyperfini et* α *est sa cardinalité interne.*

En effet, si on pose $\alpha =< m_i >$ $(m_i \in \mathbb{N})$ et $A_i = \{a+k(b-a)/m_i : k = 0, 1, \ldots, m_i\}$, on vérifie que l'ensemble considéré est l'ensemble $< A_i >$.

Toute partie interne d'un ensemble hyperfini est hyperfinie, toute image directe d'un ensemble hyperfini par une fonction interne est hyperfinie (en effet $< f_i > (< A_i >) =< f(A_i) >$) ; l'analogie avec les ensembles finis se prolonge, ainsi en raisonnant comme pour la proposition 13, on prouve

Proposition 19 *Toute partie hyperfinie et non vide de* ${}^*\mathbb{R}$ *a un maximum et un minimum.*

Utilisons ce résultat pour redémontrer le Théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 20 *Soient a,b des réels,* $a < b$ *et* f *une fonction continue dans* $[a, b]$*. Si* M *est un réel compris entre* $f(a)$ *et* $f(b)$*, il existe un réel* c *entre* a *et* b *tel que* $M = f(c)$ *.*

Démonstration Envisageons le cas où $f(a) < M < f(b)$. Soit α un hypernaturel infiniment grand et considérons les x_k définis par (4). Soit $E = \{x_k \,:\, k \leqslant \alpha$ et ${}^*f(x_k) \leqslant M\}$. E est une partie de l'ensemble hyperfini formé par tous les x_k et, vu le théorème 14, E est interne, E est donc hyperfini. Etant non vide il a donc un maximum x_γ . $x_\gamma < b$ et ${}^*f(x_\gamma) \leqslant M < {}^*f(x_{\gamma+1})$. Posons $c = \mathrm{st}(x_\gamma) = \mathrm{st}(x_{\gamma+1})$; alors $a \leqslant c \leqslant b$ et $f(c) \approx {}^*f(x_\gamma) \approx {}^*f(x_{\gamma+1})$. En passant aux parties standard, on obtient $f(c) = M$. ∎

L'intérêt des ensembles hyperfinis est de permettre d'étendre le champ d'application des méthodes finitaires, en particulier on va pouvoir 'additionner' les éléments de toute partie hyperfine de ${}^*\mathbb{R}$.

Définition 8 *Soient* A *une partie de* ${}^*\mathbb{R}$ *hyperfinie,* $A =< A_i >$ *avec chaque* A_i *fini et* f *une fonction interne définie au moins sur* A *et à valeurs dans* ${}^*\mathbb{R}$ *; on peut supposer* $f =< f_i >$ *où chaque* f_i *est une fonction définie sur* A_i *. Alors on pose*

$$\sum_{x\in A} f(x) = \left\langle \sum_{u\in A_i} f_i(u) \right\rangle \,.$$

Si α *est un hypernaturel et si* $A = \{k \in {}^*\mathbb{N} \,:\, k \leqslant \alpha\}$ *, on note* $\sum_{k=0}^{\alpha} f(k) = \sum_{x\in A} f(x)$ *.*

Cette définition est cohérente car on peut montrer qu'elle est indépendante des suites (A_i) et (f_i) vérifiant les conditions mentionnées et qu'elle rend la somme classique lorsque A est fini. On prouve aisément que les propriétés habituelles des sommes finies sont conservées, ainsi :

> si $f(x) = w$ pour tout $x \in A$ et α est la cardinalité interne de A, alors $\sum_{x\in A} f(x) = \alpha \cdot w$,
>
> $|\sum_{x\in A} f(x)| \leqslant \sum_{x\in A} |f(x)|$ et $\sum_{x\in A\cup B} f(x) = \sum_{x\in A} f(x) + \sum_{x\in B} f(x)$ si $A\cap B = \emptyset$.

Une somme hyperfinie d'infiniment petits n'est pas nécessairement infiniment petite mais :

Proposition 21 *Soient α un hypernaturel et $\{\varepsilon_k \ : \ k \leqslant \alpha\}$, $\{\Delta_k \ : \ k \leqslant \alpha\}$ deux ensembles hyperfinis d'infiniment petits. Si $\sum_{k=0}^{\alpha} |\Delta_k|$ est limité, alors $\sum_{k=0}^{\alpha} \varepsilon_k \cdot \Delta_k$ est un infiniment petit.*

En effet soit $|\varepsilon_p|$ le maximum des $|\varepsilon_k|$ pour $k \leqslant \alpha$, alors $|\sum_{k=0}^{\alpha} \varepsilon_k \cdot \Delta_k|$ est inférieur ou égal à $|\varepsilon_p| \cdot \sum_{k=0}^{\alpha} |\Delta_k|$ qui est infiniment petit.

Les ensembles internes permettent au travers des mesures de Loeb d'aborder la Théorie de la mesure sous un aspect original, on en verra un aperçu au dernier paragraphe. Pour l'instant envisageons seulement l'intégrale de Riemann.

Supposons que a, b soient des réels ($a < b$) et que f soit définie et bornée dans $[a, b]$, α représente un hypernaturel. On dit que p est une α-partition de $[a, b]$ lorsque p est une application strictement croissante de $\{k \in {}^*\mathbb{N} \ : \ k \leqslant \alpha\}$ vers ${}^*[a, b]$ telle que $p(0) = a$ et $p(\alpha) = b$. Si p est une α-partition interne de $[a, b]$, l'ensemble $\{p(k + 1) - p(k) \ : \ k \in {}^*\mathbb{N} \text{ et } k < \alpha\}$ est hyperfini et a donc un maximum qu'on appelle bien entendu le pas de p .

Théorème 22 *Soit f une fonction Riemann-intégrable dans $[a, b]$. Si*

1. *p est une α-partition interne de $[a, b]$ de pas infiniment petit,*
2. *la fonction qui à chaque hypernaturel $i < \alpha$ associe x_i est interne,*
3. *$p(i) \leqslant x_i \leqslant p(i + 1)$ pour tout $i < \alpha$,*

alors

$$\int_a^b f(x)dx = \mathrm{st}(\sum_{k=0}^{\alpha-1} {}^*f(x_k) \cdot (p(k + 1) - p(k))) .$$

Démonstration Soient $p =< p_i >$, $\alpha =< m_i >$ et $x_k =< x_{ki} >$. Pour chaque naturel i on peut supposer que m_i est un naturel, que p_i est une m_i-partition de $[a, b]$ et que $p_i(k) \leqslant x_{ki} \leqslant p_i(k + 1)$. Soit ε un réel > 0 . Classiquement on sait qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que si h est une n-partition finie (n naturel) de $[a, b]$ de pas $< \eta$, on ait

$$|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} f(u_k) \cdot (h(k + 1) - h(k))| < \varepsilon$$

si $h(k) \leqslant u_k \leqslant h(k+1)$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Puisque le pas de p est infiniment petit, la mesure de $\{i \ : \ \text{pas de } p_i < \eta\}$ vaut 1 . Il s'ensuit

$$\mu(\{i \ : \ |\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{m_i-1} f(x_{ki}) \cdot (p_i(k+1) - p_i(k))| < \varepsilon\}) \ = \ 1 \ ,$$

et donc

$$|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{\alpha-1} {}^*f(x_k) \cdot (p(k+1) - p(k))| \ < \ \varepsilon \ .$$

■

En particulier, si f est Riemann-intégrable dans $[a,b]$ et α est un hypernaturel infiniment grand,

$$\int_a^b f(x)dx \ = \ \mathrm{st}(\sum_{k=0}^{\alpha-1} {}^*f(a + k\frac{b-a}{\alpha}) \cdot \frac{b-a}{\alpha}) \qquad (5)$$

On sait que toute fonction réelle f s'étend en une fonction ${}^*f$, on peut bien entendu faire de même pour des fonctions de plusieurs variables réelles à valeurs réelles (et cela sera généralisé très bientôt) : si $g(x,y)$ est une telle fonction définie pour tous $x, y \in D$ ($D \subset \mathbb{R}$), on pose

$${}^*g(< x_i >, < y_i >) =< z_i > \quad \text{avec } z_i = \begin{cases} g(x_i, y_i) & \text{si } x_i \text{ et } y_i \in D, \\ \ldots \ (\text{un réel quelconque}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Voici une caractérisation de l'intégrale de Riemann d'où il découle de nombreuses utilisations classiques de cette intégrale (voir [10])

Théorème 23 (H.J. Keisler) *Soient f Riemann-intégrable dans $[a,b]$ et $F(u,v)$ une fonction à valeurs réelles définie pour tout $(u,v) \in [a,b] \times [a,b]$ telle que*

1. *$F(u,v) = F(u,w) + F(w,v)$ pour tous u, v, w tels que $a \leqslant u < w < v \leqslant b$,*
2. *pour tout $x \in {}^*[a,b]$ et tout Δ infiniment petit pour lequel $x + \Delta \in {}^*[a,b]$, il existe un infiniment petit ε tel que*

$${}^*F(x, x+\Delta) = {}^*f(x) \cdot \Delta + \varepsilon \cdot \Delta \ .$$

Alors $F(a,b) = \int_a^b f(x)dx$.

Démonstration Soit α un hypernaturel infiniment grand. Pour chaque naturel $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$, posons

$$S(m) = \sum_{k=0}^{m-1} F(a + k\frac{b-a}{m}, a + (k+1)\frac{b-a}{m}) \ ,$$

On a $(\forall m \in \mathbb{N})(S(m) = F(a,b))$, d'où, par transfert, ${}^*S(\alpha) = F(a,b)$. Or

$${}^*S(\alpha) = \sum_{k=0}^{\alpha-1} {}^*F(a + k\frac{b-a}{\alpha}, a + (k+1)\frac{b-a}{\alpha}) \ .$$

Pour chaque $k < \alpha$ prenons ε_k infiniment petit vérifiant

$$^*F(a + k\frac{b-a}{\alpha}, a + (k+1)\frac{b-a}{\alpha}) = {}^*f(a + k\frac{b-a}{\alpha}) \cdot \frac{b-a}{\alpha} + \varepsilon_k \cdot \frac{b-a}{\alpha} \,.$$

D'après le théorème 14, l'ensemble $\{\varepsilon_k \,:\, k < \alpha\}$ est interne et on a

$$F(a,b) = \sum_{k=0}^{\alpha-1} {}^*f(a + k\frac{b-a}{\alpha}) \cdot \frac{b-a}{\alpha} + \sum_{k=0}^{\alpha-1} \varepsilon_k \cdot \frac{b-a}{\alpha} \,.$$

De la proposition 21 et de (5) il découle $F(a,b) = \int_a^b f(x)dx$. ■

6 Superstructures et ultrapuissances bornées

Jusqu'ici, on est limité quant aux objets mathématiques auxquels on peut appliquer des méthodes non standard. Cela est dû à la présentation restreinte que jusqu'à présent l'on a donnée, mais dès les débuts de l'Analyse non standard A. Robinson a donné une présentation plus générale. Pour rencontrer ce niveau de généralité, le plus commode est d'utiliser une superstructure et d'en effectuer une ultrapuissance bornée ; on va ici décrire cette construction. On obtient ainsi un exemple d'univers non standard (on trouvera une étude détaillée des univers non standard dans [5]). On considère encore une mesure sur $\mathbb{N}$, c'est-à-dire un ultrafiltre non principal sur l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$; cela est insuffisant pour certaines applications, notamment pour des espaces topologiques quelconques, plus précisément des espaces non métriques ou des espaces à base non dénombrable, on doit alors considérer la même construction en utilisant des ultrafiltres sur des ensembles non dénombrables et vérifiant des conditions bien particulières.

6.1 Superstructure

Soit X un ensemble tel que $\mathbb{R} \subset X$. Définissons $V_k(X)$ pour chaque $k \in \mathbb{N}$ par :

$$V_0(X) = X \quad \text{et} \quad V_{k+1}(X) = V_k(X) \cup S(V_k(X)) \,. \tag{6}$$

La superstructure construite sur X est l'ensemble $V(X)$ défini comme étant l'union de tous les $V_k(X)$ ($k \in \mathbb{N}$). De la sorte

$$X \subset \ldots \subset V_k(X) \subset V_{k+1}(X) \subset \ldots \subset V(X) \,.$$

Les éléments de $V(X)$ sont répertoriés en deux catégories :

- les **individus** ou les **atomes** de $V(X)$ qui sont les éléments de X ,
- les **ensembles** de $V(X)$ qui sont les éléments de $V(X) \setminus X$.

Les éléments de X doivent se comporter comme des 'atomes', on ne peut donc retrouver dans $V(X)$ des éléments de ces atomes, dès lors on doit ajouter la condition suivante :

$$(\forall u \in X)(\, u \cap V(X) = \emptyset\,) \,. \tag{7}$$

Cette condition n'est pas réellement restrictive car pour tout ensemble X on peut trouver X' équipotent à X et satisfaisant (7).

Si $a \in V(x)$, on appelle **rang** de a le plus petit naturel p tel que $a \in V_p(X)$. Il s'ensuit :

$$u \in v \in V(X) \setminus X \Longrightarrow (u \in V(X) \text{ et } \operatorname{rang}(u) < \operatorname{rang}(v)) . \tag{8}$$

Intéressons-nous aux éléments de la superstructure $V(X)$. $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ sont évidemment des ensembles de rang 1 . Soient A un ensemble de $V(X)$ de rang m et B un ensemble de $V(X)$ de rang $\leqslant m$. Toute partie de A est un ensemble de rang $\leqslant m$, l'ensemble $S(A)$ des parties de A est un ensemble de rang $m+1$ et $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ sont des ensembles de rang $\leqslant m$. Puisque le couple $< u, v >$ est $\{\{u\}, \{u, v\}\}$, tout couple d'éléments de $V(X)$ de rang $\leqslant t$ est de rang $\leqslant t+2$. Par conséquent toute application f de A vers B , toute suite d'éléments de A est de rang $\leqslant m+2$. Par exemple toute suite de réels est de rang 3 , $l^1_{\mathbb{R}}$ est de rang 4. Dans la superstructure $V(X)$ on retrouve tous les objets mathématiques que l'on peut construire au départ des éléments de X au moyen des procédés habituels. Que placer dans X en plus de $\mathbb{R}$? Cela dépend. Un espace construit au départ des seuls réels par les procédés classiques de l'Analyse va se retrouver dans la superstructure $V(X)$. Si on désire étudier d'autres espaces ou si on veut étudier des espaces en faisant abstraction de la nature de leurs éléments, on les prend comme étant des parties de X. Par exemple, un complexe étant un couple de réels, $\mathbb{C}$ est un ensemble de rang 3, toutefois il se pourrait qu'on préfère traiter les complexes comme des atomes (car cela nous permettrait par la suite d'identifier chaque complexe z avec ${}^*z$), dans ce cas on placera une copie des complexes dans X .

Remarquons qu'il est important d'avoir défini les $V_k(X)$ de façon cumulative, par exemple cela nous assure que tout couple d'éléments de $V(X)$ est encore un élément de $V(X)$.

La notion de superstructure permet de formuler les propositions qui nous intéressent dans le langage composé uniquement des symboles $=$ et ϵ , notons ce langage $\mathcal{L}_\epsilon$. A la superstructure $V(X)$ on associe la structure $< V(X), \in >$ correspondant au langage $\mathcal{L}_\epsilon$ où $=$ et ϵ sont interprétés de façon naturelle : *si u, v sont des éléments de $V(X)$, $u = v$, $u \epsilon v$ sont vrais dans $< V(X), \in >$ si et seulement si $u = v$, respectivement $u \in v$.* Remarquons que, vu (7), pour chaque atome w de $V(X)$ la proposition $non(\exists x)(x \epsilon w)$ est vraie dans $< V(X), \in >$.

6.2 Ultrapuissances bornées

Plongeons la superstructure $V(X)$ dans une superstructure $V(Y)$. Voici le procédé suivi.

L'ensemble Y est défini en effectuant l'ultrapuissance de X modulo la mesure μ , autrement dit sur l'ensemble des suites d'éléments de X on considère l'équivalence $\sim_0$ définie par

$$(x_i) \sim_0 (y_i) \Longleftrightarrow \mu(\{i \,:\, x_i = y_i\}) = 1 ,$$

on note $< x_i >_0$ la classe d'équivalence de (x_i) et Y est l'ensemble quotient correspondant.

Une suite (A_i) d'éléments de $V(X)$ est dite **bornée** lorsqu'il existe p tel que chaque $A_i \in V_p(X)$; alors

$$\mathbb{N} = \cup_{k \leqslant p} \{i \ : \ \text{ rang de } A_i = k\} ,$$

d'où il existe m parmi $0, 1, \ldots, p$ tel que $\mu(\{i \ : \ \text{ rang de } A_i = m\}) = 1$, forcément un tel m est unique, on l'appelle le **rang** de (A_i).
Sur l'ensemble de toutes les suites bornées de $V(X)$, on définit l'équivalence $\sim$ en posant

$$(A_i) \sim (B_i) \Longleftrightarrow \mu(\{i \ : \ A_i = B_i\}) = 1 \ .$$

Remarquons que deux suites équivalentes ont nécessairement le même rang et que toute suite de rang m est équivalente à une suite (A'_i) telle que chaque A'_i soit élément de $V_m(X)$.
Pour chaque classe d'équivalence $\widetilde{(A_i)}$ on définit alors $< A_i >$ par induction sur le rang m de (A_i), pour ce faire on peut supposer que chaque $A_i \in V_m(x)$:

1. si $m = 0$, $< A_i >$ est la classe d'équivalence $< A_i >_0$ considérée plus haut,
2. si $m > 0$,
$$< A_i >= \{< B_i >: \ \mu(\{i \ : \ B_i \in A_i\}) = 1\} . \tag{9}$$

Cette induction fonctionne bien car vu (8)

$$\mu(\{i \ : \ B_i \in A_i\}) = 1 \Longrightarrow \text{ rang de } (B_i) < \text{ rang de } (A_i) \ .$$

Remarquons qu'on ne peut de la sorte définir $< A_i >$ que pour des suites (A_i) bornées.

Comme auparavant, si $A \in V(X)$, ${}^*A$ représente la classe d'équivalence de la suite dont tous les termes sont égaux à A.
Par récurrence sur m on voit que si le rang de la suite bornée (A_i) est m, $< A_i >$ est un élément de $V_m(Y)$ et aussi de ${}^*V_m(X)$, plus précisément

$$\{{}^*x \ : \ x \in V_m(X)\} \subset \{< x_i >: \ \text{ rang de } (x_i) \leqslant m\} = {}^*V_m(X) \subset V_m(Y) \ .$$

La superstructure $V(Y)$ contient donc tous les $< A_i >$ définis plus haut.

Généralisons les définitions vues auparavant.

Définition 9 *1.* $< V(X), V(Y), \in>$ *est appelé l'***ultrapuissance bornée** *de* $V(X)$ *modulo la mesure* μ.

2. Un élément de $V(Y)$ *est* **interne** *s'il est de la forme* $< A_i >$ *où* (A_i) *est une suite bornée de* $V(X)$*, il est* **hyperfini** *si chaque* A_i *est fini ; un ensemble interne est un élément de* $V(Y) \backslash Y$ *qui est interne. Les éléments de* $V(Y)$ *non internes sont dits* **externes**.

3. Un élément de $V(Y)$ *est* **standard** *s'il est de la forme* ${}^*A$ *où* $A \in V(X)$.

Les fonctions standard, internes sont des cas particuliers des ensembles standard, respectivement des ensembles internes.
De la définition de Y et de (9) il découle

Proposition 24 *Tout atome de $V(Y)$ est interne et tout élément d'un ensemble interne est interne.*

Un type particulier de formule du langage $\mathcal{L}_\epsilon$ joue un rôle essentiel :

Définition 10 *Une formule* **bornée** *est une formule du langage $\mathcal{L}_\epsilon$ dont toutes les variables liées sont restreintes à une variable, autrement dit, chaque quantificateur de cette formule doit apparaître sous une des formes $(\forall x \,\epsilon\, v)$, $(\exists x \,\epsilon\, v)$ où v est une variable (libre ou liée).*

Par conséquent, si $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ est une formule bornée et si $a_1, \ldots, a_n$ sont internes, dans la proposition $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ on considère uniquement des ensembles internes. Cela est important car alors en utilisant

$$< A_i > = < B_i > \iff \mu(\{i \,:\, A_i = B_i\}) = 1 \tag{10}$$
$$< A_i > \in < B_i > \iff \mu(\{i \,:\, A_i \in B_i\}) = 1 \,, \tag{11}$$

et en raisonnant comme dans la preuve du Théorème de Łoś , on obtient :

Théorème 25 (Théorème de Łoś pour les ultrapuissances bornées)
Soient $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ une formule bornée et $(A_i^1), \ldots, (A_i^n)$ des suites bornées de $V(X)$, alors

$$< V(Y), \in > \models \varphi[< A_i^1 >, \ldots, < A_i^n >]$$

si et seulement si

$$\mu(\{i \,:\, < V(X), \in > \models \varphi[A_i^1, \ldots, A_i^n]\,\}) = 1 \,.$$

Corollaire 2 (Principe de transfert, forme générale)
Pour toute formule bornée $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ et pour tous $A_1, \ldots, A_n$ éléments de $V(X)$, la formule $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ est vraie dans $< V(Y), \in >$ en ${}^*A_1, \ldots, {}^*A_n$ si et seulement si elle est vraie dans $< V(X), \in >$ en $A_1, \ldots, A_n$.

Ainsi $< V(X), \in >$ se plonge dans $< V(Y), \in >$ au moyen de l'application

$$* : A \longmapsto {}^*A \,.$$

qui préserve les formules bornées. Comme précédemment **on identifie chaque élément u de X avec ${}^*u$.**
La preuve du théorème 8 s'adapte naturellement et nous donne :

Proposition 26 *Soit A un ensemble de $V(X)$. Si A est fini, ${}^*A = \{{}^*x \,:\, x \in A\}$. Si A est infini, ${}^*A$ contient un élément non standard.*

Tout ensemble infini A de $V(X)$ s'agrandit donc lorsqu'on regarde son représentant ${}^*A$ dans $V(Y)$.

6.3 Quelques résultats importants concernant les ensembles internes

Le moyen le plus utilisé pour construire des ensembles internes est le Principe de définition interne, il a déjà été utilisé au travers du théorème 14 énoncé précédemment.

Théorème 27 (Principe de définition interne) *Si $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ est une formule bornée, si A est un ensemble interne et si $b_1, \ldots b_n$ sont des éléments internes de $V(Y)$, alors l'ensemble*

$$\{x \in A \ : < V(Y), \in > \models \varphi[x, b_1, \ldots, b_n]\}$$

est interne. Autrement dit toute partie d'un ensemble interne définissable dans $< V(Y), \in >$ par une formule bornée contenant comme paramètre uniquement des ensembles internes, est interne.

En effet soient $A =< A_i >$ et $b_k =< b_i^k >$, posons $B_i = \{u \in A_i \ : < V(X), \in > \models \varphi[u, b_i^1, \ldots, b_i^n]\}$, du Théorème de Łoś il découle alors que l'ensemble en question est $< B_i >$.
La preuve du théorème 15 s'étend à la situation générale d'où

Théorème 28 ($\aleph_1$-compréhension) *Toute suite (A_k) d'éléments internes d'un même $V_m(Y)$ se prolonge en une fonction interne $(A_k)_{k \in {}^*\mathbb{N}}$.*

Le résultat suivant est crucial, il complète les trois outils fondamentaux rencontrés (Principe de transfert, Principe de débordement, $\aleph_1$-compréhension) :

Théorème 29 ($\aleph_1$-saturation) *Soit (A_k) une suite d'ensembles internes d'un même $V_m(Y)$ telle que toute intersection d'un nombre fini de ces ensembles soit non vide, alors l'intersection de tous les A_k est non vide.*

En effet : (A_k) s'étend en une fonction interne $(A_k)_{k \in {}^*\mathbb{N}}$ et on sait $\cap_{j=0}^k A_j \neq \emptyset$ pour tout naturel k ; vu le Principe de débordement il existe alors un hypernaturel infiniment grand α tel que $\cap_{j=0}^{\alpha} A_j \neq \emptyset$, d'où la conclusion.

Considérons un ensemble interne infini $E =< E_i >$ où (E_i) est une suite bornée de $V(X)$; de (9) on peut déduire que l'ensemble E est équipotent à l'ultraproduit de (E_i) modulo μ , or tout ultraproduit modulo un ultrafiltre $\aleph_0$-incomplet est fini ou a une cardinalité $\geqslant 2^{\aleph_0}$ (voir par exemple [5]) et tout ultrafiltre non principal sur un ensemble dénombrable est précisément $\aleph_0$-incomplet, il s'ensuit :

Proposition 30 *Tout ensemble interne infini est non dénombrable.*

Tout ensemble interne infini a donc des parties qui sont des ensembles externes et l'ensemble des parties d'un ensemble interne infini est donc forcément externe.

Définition 11 *Si E est ensemble interne, $S_I(E)$ représente l'ensemble des parties internes de E .*

Proposition 31 *Si E est un ensemble interne, $S_I(E)$ est aussi interne. De plus si A est un ensemble de $V(X)$, $S_I({}^*A)$ et ${}^*S(A)$ coïncident*

Démonstration Soit E un ensemble interne. On peut trouver un naturel $k > 0$ tel que E soit de la forme $< E_i >$ où chaque $E_i \in V_k(X)$. Si $< A_i > \subset < E_i >$ on a $\mu(\{i \ : \ A_i \subset E_i\}) = 1$ d'où $\mu(\{i \ : \ A_i \in V_k(X)\}) = 1$ et $< A_i > \in {}^*V_k(X)$; il s'ensuit

$$S_I(E) = \{Y \in {}^*V_k(X) \ : \ (\forall u \in Y)(u \in E)\} ,$$

d'où, en vertu du Principe de définition interne, $S_I(E)$ est interne.
On procède de façon analogue pour prouver $S_I({}^*A) = {}^*S(A)$. ∎

Il est donc possible de transférer de $V(X)$ vers $V(Y)$ des propositions où on quantifie sur les parties d'un ensemble A de $V(X)$, en effet il suffit de remplacer $x \subset A$ par $x \in S(A)$; alors

$$\forall x \subset A \text{ , respectivement } \exists x \subset A$$

devient dans $V(Y)$

$$\forall x \text{ partie interne de } {}^*A \text{ , respectivement } \exists x \text{ partie interne de } {}^*A \text{ .}$$

Signalons aussi qu'un ensemble E de $V(Y)$ est hyperfini si et seulement s'il existe un hypernaturel α et une bijection interne f de $\{k \in {}^*\mathbb{N} \ : \ k < \alpha\}$ sur E. On voit ainsi que les propositions 13 et 19 peuvent aussi se déduire du Principe de transfert.

7 Espaces métriques

On peut appliquer les méthodes non standard à un espace topologique quelconque, comme déjà signalé cela nécessite de prendre une ultrapuissance modulo un ultrafiltre sur un ensemble devant être souvent non dénombrable, cet ultrafiltre devant alors satisfaire des conditions supplémentaires. Ici on se limite à envisager le cas des espaces métriques pour lesquels il suffit de considérer une mesure sur $\mathbb{N}$ comme précédemment. Soit $< E, d >$ un espace métrique tel que E soit un élément de $V(X)$; rappelons que si on a choisi X tel que $E \subset X$, on peut identifier chaque point p de E avec ${}^*p$. La distance $d(x, y)$ s'étend à ${}^*E$ tout entier en prenant des valeurs hyperréelles, il suffit de poser

$$d(< x_i >, < y_i >) =< d(x_i, y_i) >$$

(il s'agit en fait de l'extension ${}^*d$ de la fonction d) et, vu le Principe de transfert, les propriétés caractéristiques d'une distance sont conservées dans ${}^*E$ tout entier.

On étend les notions déjà vues à propos de ${}^*\mathbb{R}$: *soient $p, q \in {}^*E$, p et q sont infiniment proches, ce qui est encore noté $p \approx q$, lorsque $d(p, q)$ est infiniment petit ; soit $a \in E$, si ${}^*a \approx p$ on dit aussi que a et p sont infiniment proches et la monade de a est l'ensemble des points de ${}^*E$ infiniment proches de a.* Comme précédemment $\approx$ est une équivalence sur ${}^*E$. Remarquons que la monade d'un point a de E est aussi l'intersection de tous les ensembles ${}^*U$ où U varie parmi tous les voisinages ouverts contenant a (c'est d'ailleurs comme cela que les monades sont définies dans un espace topologique quelconque).

Proposition 32 *Soit $A \subset E$.*

1. *A est ouvert si et seulement si pour tout $p \in A$ la monade de p est une partie de ${}^*A$.*
2. *A est fermé si et seulement si tout point p de E dont la monade contient un point de ${}^*A$ est dans A.*

La partie 2 se déduit de la première dont la preuve est un exercice d'utilisation du Principe de transfert, prouvons la condition suffisante.

Démonstration Soit $p \in A$. Supposons $(\forall q \in {}^*E)(p \approx q \Rightarrow q \in {}^*A)$. Soit ε un infiniment petit > 0. $d({}^*p, q) < \varepsilon$ implique donc $q \in {}^*A$. Ainsi

$$(\exists u \in {}^*\mathbb{R})(u > 0 \text{ et } (\forall q \in {}^*E)(d({}^*p, q) < u \Longrightarrow q \in {}^*A)) ,$$

d'où la conclusion en transférant la proposition ci-dessus. ∎

La relation $\approx$ ou les monades caractérisent donc la topologie de l'espace métrique.

Théorème 33 *Une partie A de E est compacte si et seulement si tout point de ${}^*A$ est infiniment proche d'un point de A.*

Démonstration 1. Supposons A compact. Supposons qu'il existe $p \in {}^*A$ tel que p ne soit infiniment proche d'aucun point de A. Pour chaque $x \in A$ il existe donc un voisinage ouvert V_x de x tel que $p \notin {}^*V_x$. Vu la compacité de A il existe un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_m$ de A tels que

$$(\forall y \in A)(y \in V_{x_1} \text{ ou } y \in V_{x_2} \text{ ou } \ldots \text{ ou } y \in V_{x_m}) .$$

En appliquant le Principe de transfert on obtient

$$(\forall y \in {}^*A)(y \in {}^*V_{x_1} \text{ ou } y \in {}^*V_{x_2} \text{ ou } \ldots \text{ ou } y \in {}^*V_{x_m}) ,$$

ce qui contredit le choix des V_x.

2. Supposons que tout point de ${}^*A$ soit infiniment proche d'un point de A. Soit (x_m) une suite de A. Prenons un hypernaturel ν infiniment grand. De $(\forall m \in \mathbb{N})(x_m \in A)$, il découle $x_\nu \in {}^*A$. Il existe donc $b \in A$ tel que $x_\nu \approx b$. Par la proposition 12 (vérifiée aussi pour les espaces métriques), il existe une sous-suite de (x_m) convergeant vers b. A est donc compact ∎

Par analogie avec les hyperréels, on pourrait penser que tout point limité (p est limité lorsqu'il existe un point x de E tel que $d(p, {}^*x)$ soit inférieur à un réel) est infiniment proche d'un point standard, mais il n'en est pas toujours ainsi. Cela est normal car on peut toujours modifier la distance sans modifier la topologie de telle sorte que cette distance soit par exemple toujours inférieure à 1, ce qui implique que tous les points de ${}^*E$ soient alors limités. La notion de 'limité' n'est pas adéquate et il faut lui préférer celle qui ci-dessus sert à caractériser la compacité : un point p de ${}^*E$ infiniment proche d'un point de E est dit **proche d'un standard** (nearstandard).

Considérons un espace métrique $< E', d' >$ tel que $E' \in V(X)$. Les caractérisations de la continuité et de la continuité uniforme obtenues pour les fonctions réelles sont conservées. La caractérisation de la compacité obtenue plus haut est un résultat particulièrement précieux, utilisons-la pour redémontrer :

Proposition 34 *Toute fonction continue dans un compact y est uniformément continue.*

En effet soient A compact et f continue dans A ; si $x, y \in {}^*A$ et $x \approx y$, x et y sont infiniment proches d'un même point u de A d'où $f(u) \approx {}^*f(x) \approx {}^*f(y)$.

La propriété suivante joue un rôle important et illustre l'importance de l'$\aleph_1$-saturation.

Théorème 35 *Si A est une partie interne de ${}^*E$, l'ensemble* $\mathrm{st}(A)$ *défini comme étant l'ensemble des points de E infiniment proches d'un point de A est un fermé.*

Démonstration Soit a un point de E adhérent à $\mathrm{st}(A)$. Pour tout ε réel > 0 il existe $u \in A$ tel que $d(a,u) < \varepsilon$. Pour chaque naturel m notons $B_m = \{x \in A \ : \ d(a,x) < 1/(m+1)\}$, B_m est interne. Toute intersection d'un nombre fini d'ensembles B_k ($k \in \mathbb{N}$) est non vide et, vu la propriété d'$\aleph_1$-saturation, il existe donc $v \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} B_m$ d'où $a \approx v$ et $v \in A$. Il s'ensuit $a \in \mathrm{st}(A)$. ■

8 Mesures de Loeb

On continue à se placer dans une ultrapuissance bornée.

Considérons Ω et $\mathcal{A}$ des ensembles **internes** telles que $\mathcal{A}$ soit une sous-algèbre de Boole de l'algèbre de Boole des parties de Ω (autrement dit $\mathcal{A} \subset S(\Omega)$ tel que $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$ et $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B \in \mathcal{A}$ pour tous $A, B \in \mathcal{A}$.), on dit alors que $\mathcal{A}$ est une **algèbre interne** sur Ω. Remarquons que tout élément de $\mathcal{A}$ est une partie interne de Ω et que $S_I(\Omega)$ est un exemple d'algèbre interne.

La propriété suivante est essentielle :

Proposition 36 *Si $\{A_i \ : \ i \in \mathbb{N}\}$ est une collection d'ensembles internes dont l'union est interne, cette union se réduit à l'union d'un nombre fini de A_i.*

Il s'agit d'une conséquence immédiate de l'$\aleph_1$-saturation : si $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ est interne et si la conclusion ci-dessus est fausse, toute intersection d'un nombre fini de $A \setminus A_i$ serait non vide, d'où $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}(A \setminus A_i)$ serait non vide ce qui contredirait le choix de A.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre interne sur Ω. Dès lors, **si $\mathcal{A}$ est infini, $\mathcal{A}$ ne peut être une tribu**. Il semblerait alors qu'on ne puisse sur cette base développer une théorie de la mesure, il n'en est pourtant rien car les ensembles internes se manipulent de façon particulièrement élégante et vont ainsi donner naissance, en sortant de l'univers des ensembles internes, aux espaces mesurés de Loeb. Soit $\mathcal{F}$ une partie hyperfinie de $\mathcal{A}$, on peut toujours supposer $\Omega =< \Omega_i >$ $\mathcal{A} =< \mathcal{A}_i >$ et $\mathcal{F} =< \mathcal{F}_i >$ où chaque $\mathcal{A}_i$ est une sous-algèbre de Boole de $S(\Omega_i)$ et $\mathcal{F}_i$ est une partie finie de $\mathcal{A}_i$, alors $\cup\mathcal{F} =< \cup\mathcal{F}_i >$, il s'ensuit :

$$\mathcal{F} \text{ hyperfini et } \mathcal{F} \subset \mathcal{A} \Longrightarrow \cup\mathcal{F} \in \mathcal{A}\,. \tag{12}$$

Définition 12 $< \Omega, \mathcal{A}, M >$ *est un* **espace mesuré interne finiment additif** *lorsque $\mathcal{A}$ est une algèbre interne sur Ω et M une application interne de $\mathcal{A}$ vers les hyperréels $\geqslant 0$ telle que $M(A \cup B) = M(A) + M(B)$ pour tous $A, B \in \mathcal{A}$ et $A \cap B = \emptyset$.*

Bien entendu si ν est une mesure finiment additive finie (au sens classique) sur une algèbre de Boole $\mathcal{D}$ de parties d'un ensemble E, alors $< {}^*E, {}^*\mathcal{D}, {}^*\nu >$ est une algèbre interne finiment additive. Voici un autre exemple simple et très important. Si A est un ensemble hyperfini, rappelons que $|A|$ repésente la cardinalité interne de A. Soit H un ensemble interne. Sur $S_I(H)$ définissons la fonction P par

$$P \ : \ A \in S_I(H) \longmapsto \frac{|A|}{|H|}\,,$$

alors $< H, S_I(H), P >$ est un espace mesuré interne finiment additif. Plus généralement si p est une application interne de H vers les hyperréels $\geqslant 0$, la fonction définie sur $S_I(H)$ par

$$A \in S_I(H) \;\longmapsto\; \frac{1}{|H|}\sum_{u\in A} p(x)$$

définit aussi sur $S_I(H)$ un espace mesuré interne finiment additif.

On est amené à travailler aussi dans la droite achevée $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, si a est un hyperréel infiniment grand > 0, respectivement < 0 on pose $\mathrm{st}(a) = +\infty$, respectivement $\mathrm{st}(a) = -\infty$. Si f est une fonction à valeurs hyperréelles, alors ${}^o f$ représente la fonction définie sur le même ensemble que f par

$${}^o f(x) = \mathrm{st}(f(x)) \, .$$

Considérons dorénavant un espace mesuré interne finiment additif $< \Omega, \mathcal{A}, M >$ tel que $\mathcal{A}$ soit infini. Il est clair que ${}^o M$ est une mesure finiment additive sur $\mathcal{A}$ comme définie classiquement mais, puisque $\mathcal{A}$ n'est pas une tribu, $< \Omega, \mathcal{A}, {}^o M >$ n'est pas un espace mesuré. La pauvreté de la structure $< \Omega, \mathcal{A}, M >$ n'est qu'apparente, ainsi en poursuivant le raisonnement fait pour (12) on obtient immédiatement

Proposition 37 *Si $\mathcal{F}$ est une partie hyperfinie de $\mathcal{A}$, on a $\cup\mathcal{F} \in \mathcal{A}$ et si en plus les éléments de $\mathcal{F}$ sont deux à deux disjoints,*

$$M(\cup\mathcal{F}) = \sum_{A\in\mathcal{F}} M(A)$$

De plus le fait que $\mathcal{A}$ ne soit pas une tribu va pouvoir être contré par :

Proposition 38 *Soit $\{A_i \,:\, i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}$. On peut étendre $\{A_i \,:\, i \in \mathbb{N}\}$ en un ensemble hyperfini $\{A_i \,:\, i < \alpha\}$ (α hypernaturel infiniment grand) inclus dans $\mathcal{A}$ tel que*

$${}^o M(\bigcup_{i<\alpha} A_i) \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} {}^o M(A_i) \, . \tag{13}$$

De plus, si les A_i sont 2 à 2 disjoints pour tout $i \in \mathbb{N}$, dans (13) l'inégalité est remplacée par une égalité.

Démonstration Il suffit d'envisager le cas $\sum_{i=0}^{\infty} {}^o M(A_i) < +\infty$, posons $r = \sum_{i=0}^{\infty} {}^o M(A_i)$. Pour tout naturel i on a ${}^o M(\bigcup_{j<i} A_j) \leqslant r$ d'où

$$(\forall j < i)(A_j \in \mathcal{A}) \text{ et } M(\bigcup_{j<i} A_j) \leqslant r + \frac{1}{i} \, . \tag{14}$$

Appliquons l'$\aleph_1$-compréhension pour étendre la suite (A_i) en une une fonction interne $(A_i)_{i\in{}^*\mathbb{N}}$; en appliquant le Principe de débordement à l'ensemble des hypernaturels i vérifiant (14) on obtient l'hypernaturel infiniment grand α demandé puisque

$${}^o M(\bigcup_{j<\alpha} A_j) \leqslant \mathrm{st}(r + \frac{1}{\alpha}) = r \, .$$

Si les A_i sont 2 à 2 disjoints pour $i \in \mathbb{N}$, pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a $\sum_{k<m} {}^o M(A_k) \leqslant {}^o M(\bigcup_{k<\alpha} A_k)$ d'où $\sum_{k=0}^{\infty} {}^o M(A_k) \leqslant {}^o M(\bigcup_{k<\alpha} A_k)$. ∎

Utilisons maintenant le Théorème d'extension de Carathéodory (voir par exemple [16]) :

> soit $\mathcal{C}$ un clan sur un ensemble E, notons $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ la tribu engendrée par $\mathcal{C}$, selon ce théorème une mesure ν finiment additive sur $\mathcal{C}$ s'étend en une mesure $\overline{\nu}$ σ-additive sur $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ si pour toute collection $\{C_i\ :\ i \in \mathbb{N}\}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ deux à deux disjoints dont l'union est dans $\mathcal{C}$, on a $\sum_{i=0}^{\infty} \nu(C_i) = \nu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i)$; de plus, si $< E, \overline{\mathcal{T}(\mathcal{C})}, \overline{\overline{\nu}} >$ désigne l'espace mesuré complété de $< E, \mathcal{T}(\mathcal{C}), \overline{\nu} >$, on sait que, pour tout $B \in \overline{\mathcal{T}(\mathcal{C})}$, $\overline{\overline{\nu}}(B)$ est la borne inférieure des $\sum_{k=0}^{\infty} \nu(A_k)$ où $\{A_k\ :\ k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}$ et $B \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$.

La condition du Théorème d'extension de Carathéodory est trivialement vérifiée pour $< \Omega, \mathcal{A}, {}^oM >$, en appliquant ce résultat on obtient donc un espace mesuré $< \Omega, \mathcal{T}(\mathcal{A}), \overline{{}^oM} >$; de plus l'extension σ-additive de ${}^oM$ à $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ est unique, cela découle de résultats classiques d'unicité lorsque ${}^oM(\Omega) < +\infty$ et, lorsque ${}^oM(\Omega) = +\infty$, cela a été prouvé par C.W. Henson ([8]), dès lors on définit :

> *l'***espace de Loeb***, noté $< \Omega, L(\mathcal{A}), M_L >$, comme étant l'espace mesuré complété de $< \Omega, \mathcal{T}(\mathcal{A}), \overline{{}^oM} >$; la tribu $L(\mathcal{A})$, la mesure M_L sont appelées la* **tribu de Loeb***, respectivement la* **mesure de Loeb** *de M.*

La construction ci-dessus, comme la construction originale de Loeb ([12]) utilise de façon importante le Théorème de Carathéodory, toutefois on peut éviter ce passage et obtenir la tribu et la mesure de Loeb directement (voir [3], [11]) et cela au prix de raisonnements bien plus simples que ceux utilisés pour démontrer le Théorème d'extension de Carathéodory.

Théorème 39 *Si $B \in L(\mathcal{A})$,*

$$M_L(B) = \inf\{{}^oM(A)\ :\ A \in \mathcal{A} \text{ et } B \subset A\}\ , \tag{15}$$

de plus, si $M_L(B) < +\infty$,

$$M_L(B) = \sup\{{}^oM(A)\ :\ A \in \mathcal{A} \text{ et } A \subset B\}\ . \tag{16}$$

Démonstration Soient $B \in L(\mathcal{A})$ et $\{A_i\ :\ i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}$ tel que $B \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. En appliquant la proposition 38 on obtient un hypernaturel α infiniment grand tel que $\bigcup_{i<\alpha} A_i \in \mathcal{A}$, $B \subset \bigcup_{i<\alpha} A_i$ et ${}^oM(\bigcup_{i<\alpha} A_i) \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} {}^oM(A_i)$ d'où (15). Si $M_L(B) < +\infty$, il existe $C \in \mathcal{A}$ tel que $M(C)$ soit limité et $B \subset C$, en appliquant (15) à $C \setminus B$ on obtient (16). ∎

De là on peut déduire que, si $M_L(B) < +\infty$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que la mesure de Loeb de la différence symétrique de A et B soit nulle.

Les mesures de Loeb ont de nombreuses applications (on en trouvera un large panorama dans [3] et plusieurs articles de [4] traitent de ces applications, voir aussi [1] et [17]), notamment à la Théorie de la mesure proprement dite, à la Théorie des probabilités et des processus stochastiques (par exemple au mouvement brownien) et en Physique mathématique (par exemple à la Mécanique statistique). Ici on aborde un point bien particulier : la représentation naturelle qu'elles peuvent donner de certaines (nombreuses) mesures classiques. En la matière le résultat fondamental est dû à R.M. Anderson ([2]) qui a montré que toute mesure de Radon finie sur un espace séparé pouvait être représentée au moyen d'un espace de Loeb construit sur un ensemble hyperfini. Il n'y a pas de résultat général semblable pour les mesures non finies. Comme T. Lindstrøm le fait dans [11] pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, montrons comment représenter les mesures de densité sur $\mathbb{R}$ par un espace de Loeb défini sur un ensemble hyperfini. Soit p une fonction Riemann-intégrable dans tout intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et $p(x) \geqslant 0$ pour tout réel x. Rappelons que la mesure de densité p, notée ici ν_p, est la mesure sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, caractérisée par

$$\nu([a,b[) = \int_a^b p(x)dx \text{ pour tous réels } a,b \text{ avec } a < b\,.$$

Si $A \subset \mathbb{R}$, posons

$$\mathrm{st}^{-1}(A) = \{x \in {}^*R \,:\, x \text{ limité et } st(x) \in A\}\,.$$

Fixons un hypernaturel α infiniment grand et notons

$$\Omega = \{\frac{k}{\alpha} \,:\, k \in {}^*\mathbb{N} \text{ et } -\alpha^2 \leqslant k \leqslant \alpha^2\}\,.$$

Ainsi Ω est hyperfini et tout réel est infiniment proche d'éléments de Ω. Pour toute partie interne A de Ω posons

$$M(A) = \frac{1}{\alpha}\sum_{x\in A} {}^*p(x)$$

(dans le cas de la mesure de Lebesgue $M(A) = \frac{|A|}{\alpha}$). $< \Omega, S_I(\Omega), M >$ est clairement un espace mesuré interne finiment additif. Montrons que l'espace de Loeb associé $< \Omega, L(S_I(\Omega)), M_L >$ permet de représenter naturellement l'espace mesuré complété de $< \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \nu_p >$.

Proposition 40 *Soit* $< \mathbb{R}, \mathcal{C}, \overline{\nu}_p >$ *l'espace mesuré complété de* $< \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \nu_p >$, *alors*

1. $E \in \mathcal{C}$ *si et seulement si* $\mathrm{st}^{-1}(E) \cap \Omega \in L(S_I(\Omega))$,
2. $\overline{\nu}_p(E) = M_L(\mathrm{st}^{-1}(E) \cap \Omega)$ *pour tout* $E \in \mathcal{C}$.

Démonstration Soient $\mathcal{T}$ l'ensemble des parties E de $\mathbb{R}$ telles que $\mathrm{st}^{-1}(E) \cap \Omega \in L(S_I(\Omega))$ et m la fonction définie sur $\mathcal{T}$ par $m(E) = M_L(\mathrm{st}^{-1}(E) \cap \Omega)$. Puisque

$$\mathrm{st}^{-1}(\mathbb{R}) \cap \Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in \Omega \,:\, -n \leqslant x \leqslant n\}\,,$$

$\mathbb{R} \in \mathcal{T}$. On vérifie dès lors aisément que $< \mathbb{R}, \mathcal{T}, m >$ est un espace mesuré complet. Soit a un réel, on a

$$\mathrm{st}^{-1}(]-\infty, a[) \cap \Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in \Omega \,:\, -n \leqslant x \leqslant (a - \frac{1}{n})\}\,,$$

d'où $]-\infty, a[\in \mathcal{T}$ et donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{T}$.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$, montrons que $m(]a,b[) = \nu_p(]a,b[)$ ce qui impliquera que m et $\overline{\nu}_p$ coïncident sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et donc aussi sur $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$). Soit $r = M_L(\mathrm{st}^{-1}(]a,b[) \cap \Omega)$ et pour $n \in {}^*\mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$ posons

$$A_n = \{x \in \Omega \ : \ (a + \frac{1}{n}) \leqslant x \leqslant (b - \frac{1}{n})\} \ \text{ et } \ s_m = M_L(A_m) \ .$$

On a $\mathrm{st}^{-1}(]a,b[) \cap \Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, d'où $r = \lim_{n\to\infty} s_n$ et pour tout hypernaturel γ infiniment grand on a $r \approx s_\gamma$. $(s_m)_{m\in{}^*\mathbb{N}}$ et $(M(A_m))_{m\in{}^*\mathbb{N}}$ sont internes et pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a

$$|M(A_m) - s_m| < 1/m \text{ et } m < \alpha \ ;$$

vu le Principe de débordement il existe donc un hypernaturel infiniment grand β tel que $\beta < \alpha$ et $|M(A_\beta) - s_\beta| < 1/\beta$. Il s'ensuit $M(A_\beta) \approx s_\beta \approx r$. Notons u, v respectiment le minimum et le maximum de A_β , alors $v + \dfrac{1}{\alpha}$ est dans $[a, b]$ et

$$r \approx M(A_\beta) \approx (\,(u-a)p(a) \ + \ \frac{1}{\alpha}\sum_{x\in A_\beta} {}^*p(x) \ + \ (b - v - \frac{1}{\alpha})p(b)) \approx \int_a^b f(x)dx$$

vu le théorème 22 ; par conséquent $r = \nu_p(]a,b[)$.

Pour terminer prouvons $\mathcal{T} \subset \mathcal{C}$. Soient $B \in \mathcal{T}$ tel que $m(B)$ soit finie et ε un réel > 0. Vu (15) et (16) il existe A_1, A_2 parties internes de Ω telles que

$$A_1 \subset \mathrm{st}^{-1}(B) \cap \Omega \subset A_2 \text{ et } M(A_2) - M(A_1) < \varepsilon \ .$$

Vu le théorème 35, $\mathrm{st}(A_1)$ est fermé ; de plus $\mathrm{st}(A_1) \subset B$ et, puisque tous les éléments de A_1 sont limités, $A_1 \subset \mathrm{st}^{-1}(\mathrm{st}(A_1)) \cap \Omega$ d'où $M_L(A_1) \leqslant \nu_p(\mathrm{st}(A_1))$; posons $C = \mathrm{st}(A_1)$.
$\mathbb{R} \setminus \mathrm{st}(\Omega \setminus A_2)$ est ouvert et $B \subset (\mathbb{R} \setminus \mathrm{st}(\Omega \setminus A_2))$; on vérifie que $(\mathrm{st}^{-1}(\mathbb{R} \setminus \mathrm{st}(\Omega \setminus A_2)) \cap \Omega) \subset A_2$, d'où $\nu_p(\mathbb{R} \setminus \mathrm{st}(\Omega \setminus A_2)) \leqslant M_L(A_2)$; posons $D = \mathbb{R} \setminus \mathrm{st}(\Omega \setminus A_2)$.
C et D sont donc des boréliens tels que

$$C \subset B \subset D \ \text{ et } \ \nu_p(D) - \nu_p(C) \leqslant M_L(A_2) - M_L(A_1) \leqslant \varepsilon \ .$$

Par conséquent $B \in \mathcal{C}$. Puisque m est σ-finie, $\mathcal{T} \subset \mathcal{C}$. ∎

Références

[1] S. Alberavio, J.E. Fenstad, R. Høegh-Krohn, T. Lindstrøm, *Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics*, Academic Press, 1986.

[2] R.M. Anderson, *Star-finite representations of measure spaces*, Trans.Amer.Math.Soc.,271(1982),667-687.

[3] N.J. Cutland, *Nonstandard measure theory and its applications*, Bull. London Math. Soc., 15(1983), 529-589.

[4] N.J. Cutland, *Nonstandard Analysis and its Applications*, ed., Cambridge Univ. Press, 1988.

[5] C.C. Chang et H.J. Keisler, *Model Theory*(Third edition), North-Holland, 1990.

[6] M. Davis, *Applied Nonstandard Analysis*, Wiley, 1977.

[7] F. Diener et G. Reeb, *Analyse Non Standard*, Hermann (1989).

[8] C.W. Henson, *Unbounded Loeb measures*, Proc. Amer. Math. Soc., 74(1979), 143-150.

[9] A.E. Hurd et P.A. Loeb, *An Introduction to Nonstandard Real Analysis*, Academic Press, 1985.

[10] H.J. Keisler, *Foundations of Infinitesimal Calculus*, Prindle, Weber and Schmidt, 1976.

[11] T. Lindstrøm, *An invitation to nonstandard analysis*, dans [4], 1-105.

[12] P.A. Loeb, *Conversion from nonstandard to standard measure spaces and applications in probability theory*, Trans. Amer. Math. Soc., 211(1975), 113-122.

[13] E. Nelson, *Internal Set Theory*, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), 1165-1198.

[14] A. Robert, *Analyse Non Standard*, Presses Polytechniques Romandes (1985).

[15] A. Robinson, *Non-standard analysis*, Koninkl. Ned. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 64, 1961, 432-440.

[16] L. Schwartz, *Analyse III, Calcul intégral*, Hermann, 1993.

[17] K.D. Stroyan et J.M. Bayod, *Foundations of Infinitesimal Stochastic Analysis*, North-Holland 1986.

[18] K.D. Stroyan, *Infinitesimal analysis of curves and surfaces* dans Handbook of Mathematical Logic (K.J. Barwise, ed.), North-Holland, 1977, 197-231.

Institut Supérieur Industriel Liégeois,
6, quai Gloesener,
B 4020, Liège.
email :`apetry@vm1.ulg.ac.be`