Non-résonance entre les deux premières valeurs propres d'un problème quasi-linéaire

A.R.El Amrouss M.Moussaoui

Abstract

We consider the quasilinear Dirichlet boundary value problem

$$-(\phi_p(u'))' = f(u) + h(x), u(a) = u(b) = 0,$$

where $(\phi_p(u'))'$ is the one dimentional p-Laplacien, and prove its solvability for any given h, under new assumptions on the asymptotic behaviour of the potential of the nonlinearity f, with respect to two first eigenvalues of the associated quasilinear problem.

1 Introduction

Dans cet article on s'intéresse à l'existence des solutions du problème suivant :

$$(\mathcal{P})\begin{cases} -(\phi_p(u'))' &= f(u) + h(x) \qquad \text{dans }]a,b[\\ u(a) = u(b) &= 0 \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ est Lebesgue intégrable et $\phi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\phi_p(s) = |s|^{p-2}s$, $p > 1$.

Notons par $\lambda_k(p)$, la $k^{ième}$ valeur propre du problème :

$$\begin{cases} -(\phi_p(u'))' &= \lambda\phi_p(u) \qquad \text{dans }]a,b[\\ u(a) = u(b) &= 0 \end{cases}$$

Received by the editors January 1996.
Communicated by J. Mawhin.
1991 *Mathematics Subject Classification :* 34B15 - 34C25.
Key words and phrases : Non-résonance - Quasi-linéaire - théorie du degré.

Il est bien connu que $\lambda_k(p) = \left(\dfrac{k\Pi_p}{b-a}\right)^p$ avec $\Pi_p = 2\displaystyle\int_0^{(p-1)^{1/p}} \dfrac{ds}{(1-\frac{s^p}{p-1})^{1/p}}$.

Posons

$$l_\pm(p) = \liminf_{s\to\pm\infty} \frac{f(s)}{\phi_p(s)}, \qquad k_\pm(p) = \limsup_{s\to\pm\infty} \frac{f(s)}{\phi_p(s)}$$

et

$$L_\pm(p) = \liminf_{s\to\pm\infty} \frac{pF(s)}{|s|^p}, \qquad K_\pm(p) = \limsup_{s\to\pm\infty} \frac{pF(s)}{|s|^p}$$

où $F(s) = \displaystyle\int_0^s f(t)\,dt$.
On suppose

$$\lambda_1(2) \le l_\pm(2) \le k_\pm(2) \le \lambda_2(2) \tag{1.1}$$

Il est bien connu que, voir par exemple [D] et [M-W], dans ces conditions et si

$$\lambda_1(2) < l_\pm(2) \text{ et } k_+(2) \text{ ou } k_-(2) < \lambda_2(2)$$

alors pour tout h, $(\mathcal{P})$ est solvable pour $p = 2$.

Récemment, certains auteurs ont établi divers résultats d'existence sous les conditions (1.1) et si,

$$\lambda_1(2) < K_\pm(2) \text{ et } L_+(2) \text{ ou } L_-(2) < \lambda_2(2).$$

Citons par exemple : Mawhin, Ward et Willem [M-W-W], Costa-Olivera [C-O], Omari-Zanolin [O-Z] et Del Santo-Omari [D-O].

Dans [N-Z], Njoku et Zanolin ont prouvé un résultat d'existence en supposant :
i) $\lambda_1(2) < l_+(2) \le L_+(2) < \lambda_2(2)$ (1.2)
ii) $\lambda_1(2) < K_-(2) \le k_-(2) < \lambda_2(2)$
iii) $sign(s)f(s) \to +\infty$, quand $|s| \to +\infty$.

Le but de ce papier est de présenter un ensemble de résultats d'existence, permettant de se passer de l'inégalité gauche dans (1.1) et (1.2) c'est à dire nous pouvons avoir la situation suivante (cf exemple 5.1) :

$$\liminf_{s\to\pm\infty} \frac{f(s)}{\phi_p(s)} \le \lambda_1(p) \le \limsup_{s\to\pm\infty} \frac{f(s)}{\phi_p(s)}$$

Théoreme 1.1 *Supposons que $sign(s)f(s) \to +\infty$, quand $|s| \to +\infty$*

$$\lambda_1(p) < \limsup_{s\to\pm\infty} \frac{pF(s)}{|s|^p},\ \limsup_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{\phi_p(s)} \le \lambda_2(p) \text{ et } \limsup_{s\to-\infty} \frac{f(s)}{\phi_p(s)} < \lambda_2(p).$$

Alors $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution pour tout $h \in L^1(a,b)$.

Ensuite, nous nous limitons à des conditions portant uniquement sur le rapport $\dfrac{pF(s)}{|s|^p}$. Notons par :

$$\Pi_p(u) = 2\int_0^{u(p-1)^{1/p}} \frac{ds}{(1-\frac{s^p}{p-1})^{1/p}}, \quad \text{pour } u \in [-1,1],\ p \ge 1.$$

$$A = \Big\{((s,t),(x,y)) \in ([\lambda_1(p),\lambda_2(p)]^2)^2 \mid\ s \le t,\ x \le y \text{ et } \frac{1}{s^{1/p}}\Pi_p(\frac{s}{t})^{1/p} +$$

$$\frac{1}{x^{1/p}}\Pi_p(\frac{x}{y})^{1/p} = b-a\Big\}$$

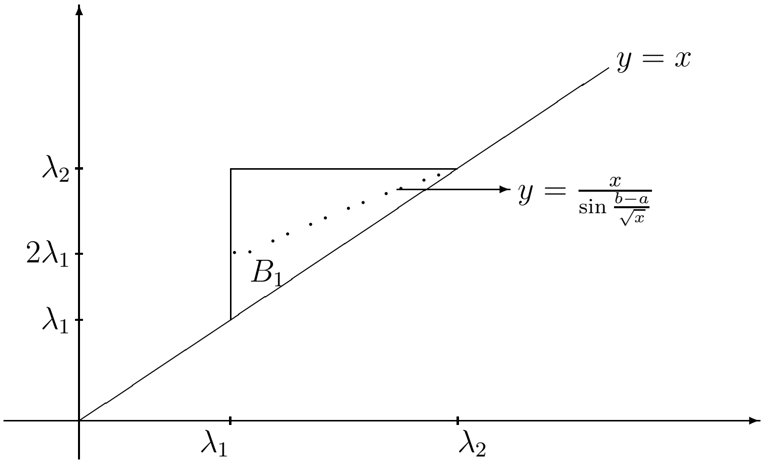
$B = \{((u,v),(w,z)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid \exists((s,t),(x,y)) \in A$ avec $(u,v) \in]s,t[^2$ et $(w,z) \in]x,y[^2\}$.

Théoreme 1.2 *Supposons que* $((L_+(p),K_+(p)),(L_-(p),K_-(p))) \in B$ *et que* $sign(s)f(s) \to +\infty$, *quand* $|s| \to +\infty$. *Alors* $(\mathcal{P})$ *admet au moins une solution pour tout* $h \in L^1(a,b)$.

Dans le cas $p = 2$, l'ensemble A est :

$$A = \Big\{((s,t),(x,y)) \in ([\lambda_1,\lambda_2]^2)^2 \mid \frac{2}{x^{1/2}}Arcsin(\frac{x}{y})^{1/2} = \frac{b-a}{2} \text{et} \quad \frac{2}{x^{1/2}}Arcsin(\frac{x}{y})^{1/2} = \frac{b-a}{2}\Big\}$$

on a la représentation suivante :



Donc si $sign(s)f(s) \to +\infty$ et $(L_+(2),K_+(2)),(L_-(2),K_-(2)) \in B_1$, alors pour tout $h \in L^1$, $(\mathcal{P})$ est solvable.

La preuve de ces résultats utilise la méthode de Leray- Schauder et certaines propriétés des oscillations de la solution d'une équation différentielle ordinaire.

2 Lemmes techniques

Considérons la famille de problèmes suivants :

$$(\mathcal{P},\lambda)\begin{cases} -(\phi_p(u'))' &= f(\lambda,u) + \lambda h(x) \qquad dans\ ]a,b[\\ u(a) = u(b) &= 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

où $f(\lambda,.)$ est une fonction continue quelconque pour $\lambda \in [0.1]$. Posons

$$y(t) = \phi_p(u') + \lambda H(t) \tag{2.2}$$

avec $H(t) = \int_a^t h(s)\,ds$ et par suite

$$y'(t) = -f(\lambda,u(t)) \tag{2.3}$$

Nous observons que toute solution $u(.)$ du problème $(\mathcal{P},\lambda)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\phi_p(u')$ absolument continue. Notons par $u^* = u(x^*) = \max u(.)$ et $u_* = \min u(.) = u(x_*)$, avec x^* (resp x_*) est le premier point de $[a,b]$ (resp. le dernier point) où le maximum (resp. le minimum) de $u(.)$ est atteint.

Le lemme suivant généralise un lemme donné par Njoku et Zanolin dans [N-Z].

Lemme 2.1 *Supposons qu'il existe $c>0$ tel que*

$$f(\lambda,s)>0 \qquad \text{pour tout } s\geq c \text{ et } \lambda\in[0.1]. \tag{2.4}$$

1. *Alors pour tout $d\geq 0$ il existe $R_d>c$ tel que pour chaque solution $u(.)$ de $(\mathcal{P},\lambda)$ avec $u^*>R_d$ on a les propriétés suivantes :*
   (a) *il existe des paramètres α^+, β^+, γ_1^+, γ_2^+ avec :*

   $$\alpha^+<\gamma_1^+\leq x^*\leq\gamma_2^+<\beta^+$$

   tels que $u(\alpha^+)=u(\beta^+)=c$ et $u(.)>c$ sur $]\alpha^+,\beta^+[$, $y(\gamma_1^+)=2M$ et $y(\gamma_2^+)=-2M$ avec $M=|H|_\infty$.

   (b) *il existe une constante $L>0$, dépendant uniquement de γ_1^+ et γ_2^+, telle que : $u^*-L<u(\gamma_1^+)$, $u(\gamma_2^+)<u^*$, $u(.)$ est croissante sur $[\alpha^+,\gamma_1^+]$ et décroissante sur $[\gamma_2^+,\beta^+]$.*
2. *Si $u_*\geq -R_d$ alors :*

$$\lim_{u^*\to+\infty}\beta^+-\alpha^+=b-a \qquad \textit{uniformément en } \lambda \tag{2.5}$$

Preuve :

1. Prenons $\alpha^+=\max\{x\in[a,x^*]:u(x)=c\}$ et $\beta^+=\min\{x\in[x^*,b]:u(x)=c\}$ alors $u(.)>c$ sur $]\alpha^+,\beta^+[$. De (2.2), y est strictement décroissante sur $]\alpha^+,\beta^+[$, alors pour tout $t\in[\alpha^+,\gamma_1^+]$:

$$\phi_p(u')=y(t)-\lambda H(t)\geq y(\gamma_1^+)-M=M \tag{2.6}$$

donc $u'(.)>0$ sur $[\alpha^+,\gamma_1^+]$, par suite $u(.)$ est strictement croissante sur $[\alpha^+,\gamma_1^+]$ et de même on montre que $u(.)$ est strictement décroissante sur $[\gamma_2^+,\beta^+]$. Pour un $t_0\in\,]\gamma_1^+,x^*[$ tel que $y(t_0)=\frac{3}{2}M$, on montre de même que dans (2.5) $u(.)$ est strictement croissante sur $[\alpha^+,t_0]$. D'où $u(\gamma_1^+)<u(t_0)\leq u^*$ et de la même manière nous prouvons que $u(\gamma_2^+)<u^*$ et d'après (2.6) on montre l'existence d'un $L>0$ tel que :

$$u^*-L<u(\gamma_1^+),u(\gamma_2^+).$$

2. En intégrant (2.2) sur $[t,\alpha^+]$ pour tout $t\in[a,\alpha^+]$ alors :

$$y(\alpha^+)+\int_t^{\alpha^+}f(\lambda,u(s))\chi_{[u(s)\leq c]}\,ds+\int_t^{\alpha^+}f(\lambda,u(s))\chi_{[u(s)>c]}\,ds=y(t)$$

De (2.4) il vient :

$$y(\alpha^+)+\int_t^{\alpha^+}f(\lambda,u(s))\chi_{[u(s)\leq c]}\,ds\leq y(t)$$

donc il existe une constante $K(c)$ dépendante de c telle que :

$$y(\alpha^+) - K(c) \leq y(t) \qquad \forall t \in [a, \alpha^+] \tag{2.7}$$

D'autre part, pour tout $t \in [\alpha^+, x^*]$ nous avons :

$$|u'(t)|^{p-1} \leq |y(t)| + M \tag{2.8}$$

et comme y est décroissante alors $y(x^*) \leq y(t) \leq y(\alpha^+)$, d'où

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq |y(\alpha^+)| + |y(x^*)| \\ &\leq |y(\alpha^+)| + M \qquad \forall t \in [\alpha^+, x^*] \end{aligned} \tag{2.9}$$

Or $y(\gamma_1^+) \leq y(\alpha^+)$ et par suite $y(\alpha^+) \geq M$.
En combinant (2.8) et (2.9) il vient :

$$|u'(t)| \leq (y(\alpha^+) + M)^{1/p-1}$$

Puis, en intégrant sur $[\alpha^+, x^*]$ il résulte :

$$\left(\frac{u^* - c}{b - a}\right)^{p-1} - M \leq y(\alpha^+)$$

et en vertu de (2.7) il suit que pour tout $t \in [a, \alpha^+]$:

$$\left(\frac{u^* - c}{b - a}\right)^{p-1} - 2M - K(c) \leq |u'(t)|^{p-1} u'(t)$$

Pour u^* satisfaisant

$$\left(\frac{u^* - c}{b - a}\right)^{p-1} > 2M + K(c)$$

On a $u'(t) > 0$, donc

$$[(\frac{u^* - c}{b - a})^{p-1} - (2M + K(c))]^{1/p-1} \leq u'(t).$$

D'où, en intégrant cette dernière sur $[a, \alpha^+]$ nous avons :

$$\alpha^+ - a \leq \frac{c}{[(\frac{u^*-c}{b-a})^{p-1} - (2M + K(c))]^{1/p-1}}$$

et par suite, $\lim\limits_{u^* \to +\infty} \alpha^+ - a = 0$ uniformément en $\lambda \in [0, 1]$.
De même on montre que

$$\lim_{u^* \to +\infty} b - \beta^+ = 0 \qquad \text{uniformément en } \lambda \in [0, 1]$$

d'où

$$\lim_{u^* \to +\infty} \beta^+ - \alpha^+ = b - a \qquad \text{uniformément en } \lambda \in [0, 1]$$

Remarque 1:
i) Une version "duale" du lemme 2.1 peut être obtenue en remplaçant (2.4) par $f(\lambda, s) < 0$ pour tout $s \leq -c$ et $\lambda \in [0.1]$. Dans cette situation on change le symbole " $+$ " des paramètres α^+, β^+, γ_1^+, γ_2^+ par le symbole " $-$ ".
ii) Considérons

$$A = \{u \in C[a,b] \mid u(.) \text{ solution de } (\mathcal{P},\lambda) \text{ avec } \lambda \in [0.1]\}$$

Si A est uniformément borné alors il existe S, T deux constantes telles que $\max u(.) \neq S$ et $\min u(.) \neq -T$ pour toute solution $u(.)$ de $(\mathcal{P},\lambda)$ avec $\lambda \in [0,1]$.

Dans tout ce qui suit on va supposer que A est non uniformément borné.

Lemme 2.2 *Supposons qu'il existe $k_1, k_2 > 0$ tels que :*

$$k_1 \leq \lim_{u^* \to +\infty} \beta^+ - \alpha^+ < b - a \qquad \textit{uniformément en } \lambda$$

et

$$k_2 \leq \lim_{u_* \to -\infty} \beta^- - \alpha^- < b - a \qquad \textit{uniformément en } \lambda$$

avec $b - a < k_1 + k_2$, alors $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution pour tout $h \in L^1$.

Preuve La preuve de ce lemme se fait en deux étapes :
$1^{ére}$ *étape* Nous montrons l'existence de deux constantes $S, T > 0$ telles que : $\max u(.) \neq S$ et $\min u(.) \neq -T$ pour toute solution $u(.)$ de $(\mathcal{P}.\lambda)$ avec $\lambda \in [0,1]$.

> *Affirmation* : *il existe une constante $K > 0$ indépendante de $u(.)$ et λ telle que $\max u(.) \leq K$ ou $-K \leq \min u(.)$ pour toute $u(.)$ solution de $(\mathcal{P}.\lambda)$.*

En effet, Supposons par l'absurde qu'il existe une suite $u_n(.)$: solution de $(\mathcal{P},\lambda)$ pour $\lambda = \lambda_n$ telle que $\max u_n(.) \to +\infty$ et $\min u_n(.) \to -\infty$, quand $n \to +\infty$. Puisque

$$b - a < k_1 + k_2 \leq \liminf_{u^* \to +\infty} \beta^+ - \alpha^+ + \liminf_{u_* \to -\infty} \beta^- - \alpha^-,$$

alors on peut passer à une sous-suite notée aussi $u_n(.)$ telle que :

$$b - a < \lim_{n \to +\infty} \beta_n^+ - \alpha_n^+ + \beta_n^- - \alpha_n^-$$

et comme

$$\lim_{n \to +\infty} \beta_n^+ - \alpha_n^+ + \beta_n^- - \alpha_n^- \leq b - a,$$

il résulte :

$$b - a < b - a$$

Ce qui est absurde.
Pour achever la première étape, nous allons traiter deux cas :
1 ^{er} cas : Supposons $\min u(.) \geq -K$.
Il existe $S > 0$ tel que $\max u(.) \neq S$ pour toute solution $u(.)$ de $(\mathcal{P},\lambda)$ avec $\lambda \in [0.1]$; car sinon, nous aurions pour tout $S > 0$ l'existence d'une solution $u_S(.)$ de $(\mathcal{P},\lambda)$ telle que $\max u_S(.) = S$, et comme $\liminf_{u^* \to +\infty} \beta^+ - \alpha^+ < b - a$, alors il existera une suite $u_n(.)$ solution de $(\mathcal{P},\lambda)$ telle que $\lim_{n \to +\infty} \beta_n^+ - \alpha_n^+ < b - a$ et $\max u_n(.) \to +\infty$. D'autre part, $\min u_n(.) \geq -K$, alors d'après le lemme 2.1 il vient

$$\lim_{n \to +\infty} \beta_n^+ - \alpha_n^+ = b - a$$

Ce qui est absurde.
En prenant $T = K + 1$, alors la conclusion de la première étape est satisfaite.

$2^{ème}$ *cas* : Supposons $\max u(.) \leq K$.
De la même manière que dans le 1^{er} cas, on montre l'existence de deux constantes $S, T > 0$ telles que $\max u(.) \neq S$ et $\min u(.) \neq -T$ pour toute solution $u(.)$ de $(\mathcal{P}, \lambda)$.
$2^{ème}$ *étape* : Nous prouvons que $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution pour tout $h \in L^1$, pour ceci on va utiliser la théorie du degré de Leray-Schauder.
Considérons le problème

$$(2.10)\begin{cases} -(\phi_p(u'))' &= e(x) \qquad \text{dans }]a,b[\\ u(a) = u(b) &= 0 \end{cases}$$

où $e \in L^1$.
Dans [D-E-M], il est prouvé que (2.10) admet une solution unique. Soit H l'opérateur qui envoie $e \in L^1$ en l'unique solution $u(.)$ du problème (2.10). Notons que H est un opétateur borné et considérons l'opérateur K défini comme suit :

$$\begin{array}{rccl} K \; : & \mathcal{C}([a,b]) & \rightarrow & \mathcal{C}([a,b]) \\ & u(.) & \mapsto & H(f(u(.)) + h(.)) \end{array}$$

Nous vérifions facilement que K est un opérateur compact.
Soit $u(.) \in \mathcal{C}([a,b])$ telle que :

$$u(.) = \lambda K(u(.)) \qquad \textit{pour } \lambda \in]0,1] \tag{E,λ}$$

alors (E, λ) correspond au problème $(\mathcal{P}.\lambda)$ pour tout $\lambda \in]0,1]$.
Considérons l'ouvert :

$$\mathcal{O} = \{u(.) \in C([a,b]) \mid -T < u(t) < S \quad \forall t \in [a,b]\}$$

D'après la première étape, $0 \notin (I - \lambda K)(\partial\mathcal{O})$ et ainsi (E, λ) admet une solution pour $\lambda = 0$. De l'invariance par l'homotopie de la théorie du degré de Leray-Schauder, on tire que $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution. ∎

3 Preuve des théorèmes

Dans tout ce qui suit nous allons supposer que $f(\lambda, s) = (1-\lambda)\nu s + \lambda f(s)$ avec $\lambda \in [0,1]$ et ν est fixé tel que $\lambda_1 < \nu < \limsup_{s \to \pm\infty} \dfrac{pF(s)}{|s|^p}$. Puisque $sign(s)f(s) \rightarrow +\infty$, quand $|s| \rightarrow \infty$, alors il existe une constante $c > 0$ telle que : $sign(s)f(\lambda, s) > 0$ pour tout $|s| \geq c$.

3.1 Preuve du théorème 1.1

Pour la preuve du théorème 1.1 nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1 *i)* $\dfrac{b-a}{2} \leq \liminf_{u^* \to +\infty} \beta^+ - \alpha^+ < b - a$ *uniformément en* $\lambda \in [0,1]$

ii) $\dfrac{b-a}{2} \leq \liminf_{u_* \to -\infty} \beta^- + \alpha^- < b-a$ *uniformément en* $\lambda \in [0,1]$

Preuve :

Montrons *i)*, puis *ii)* découle d'une manière similaire.

1ère étape : nous allons montrer que si $\nu < \limsup_{s\to+\infty} \dfrac{pF(s)}{|s|^p}$ alors

$$\liminf_{u^*\to+\infty} \beta^+ - \alpha^+ < \frac{\Pi_p}{(\nu)^{1/p}}.$$

En effet, de l'inégalité $\nu < \limsup_{s\to+\infty} \dfrac{pF(s)}{|s|^p}$ nous avons :

$$\limsup_{s\to+\infty} (F(s) - \frac{\nu}{p} s^p) = +\infty \tag{3.1}$$

D'où l'existence d'une suite $(s_n)_n$ croissante qui tend vers $+\infty$ telle que :

$$(F(s) - \frac{\nu}{p} s^p) \leq (F(s_n) - \frac{\nu}{p} s_n^p) \qquad \text{pour tout } s \in [0, s_n[$$

ou encore

$$\frac{\nu}{p}(s_n^p - s^p) \leq F(s_n) - F(s) \qquad \text{pour tout } s \in [0, s_n[\tag{3.2}$$

Multiplions l'équation (2.1) par $u'(.)$ et intégrons sur $[t, x^*]$ avec $t \in [\alpha^+, x^*]$, il résulte :

$$\begin{aligned}\int_t^{x^*} \phi_p(u'(s))'u'(s)\,ds &= (1-\lambda)\nu \int_t^{x^*} \phi_p(u(s))u'(s)\,ds + \lambda \int_t^{x^*} f(u(s))u'(s)\,ds \\ &\quad + \int_t^{x^*} h(s)u'(s)\,ds\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\frac{p}{p^*}(|u'(t)|^p) &= (1-\lambda)\nu(u^{*p} - u(t)^p) + \lambda(F(u^*) - F(u(t))) \\ &\quad + \lambda \int_t^{x^*} h(s)u'(s)ds \end{aligned} \tag{3.3}$$

En utilisant le fait que $y(.)$ est décroissante sur $[t, x^*]$, ϕ_p est un homéomorphisme croissant et $u(.)$ est croissante sur $[t, \gamma_1^+]$, alors il existe deux constantes $c_1,\ c_2 > 0$ telles que :

$$|\int_t^{\gamma_1^+} h(s)u'(s)ds| \leq c_1 u'(t) + c_2$$

D'autre part, on a $y(x^*) \leq y(t) \leq y(\gamma_1^+)$ pour tout $t \in [\gamma_1^+, x^*]$ et de (2.2) nous avons l'existence d'une constante c_2' telle que :

$$|\int_{\gamma_1^+}^{x^*} h(s)u'(s)\,ds| \leq c_2'$$

D'où il vient :

$$|\int_t^{x^*} h(s)u'(s)ds| \leq c_1 u'(t) + r \tag{3.4}$$

En tenant compte de (3.2), (3.4) et en posant $u^* = s_n$ dans (3.3) alors après un calcul simple il vient :

$$\nu\frac{p}{p^*}(s_n^p - u(t)^p) \leq (u'(t)+m)^p$$

où m est une constante qui dépend seulement de h, ou encore

$$(\nu\frac{p}{p^*}((s_n^p - u(t)^p))^{1/p} \leq u'(t) + m \text{ pour tout } t \in [\alpha+, \gamma_1^+] \tag{3.5}$$

D'où, en intégrant (3.5) sur $[\alpha^+, \gamma^+]$:

$$(\nu\frac{p}{p^*})^{1/p}(\gamma_1^+ - \alpha^+) \leq \int_{c/s_n}^{u(\gamma_1^+)/s_n} \frac{ds}{(1-s^p)^{1/p}} + \int_{\alpha^+}^{\gamma_1^+} \frac{m\,dt}{(s_n^p - u(t)^p)^{1/p}} \tag{3.6}$$

On peut vérifier aisément que :

$$\int_0^{c/s_n} \frac{ds}{(1-s^p)^{1/p}} \to 0, \quad \text{quand } n \to +\infty$$

D'autre part, comme $u(\gamma_1^+) < s_n$ nous avons :

$$\int_{\alpha^+}^{\gamma_1^+} \frac{m\,dt}{(s_n^p - u(t)^p)^{1/p}} \leq (\gamma_1^+ - \alpha+)\frac{m}{(s_n^p - u(\gamma_1^+)^p)^{1/p}} \qquad \text{quand } n \to \infty$$

Faisons tendre n vers $+\infty$ dans (3.6), nous obtenons :

$$\lim_{n\to+\infty} \gamma_1^+ - \alpha^+ \leq \frac{1}{(\nu)^{1/p}} \int_0^{(p-1)^{1/p}} \frac{ds}{(1-\frac{s^p}{p-1})} = \frac{1}{(\nu)^{1/p}}\frac{\Pi_p}{2}$$

De même on montre que :

$$\lim_{n\to+\infty} \beta^+ - \gamma_2^+ \leq \frac{1}{(\nu)^{1/p}}\frac{\Pi_p}{2}$$

Maintenant nous allons montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \gamma_2^+ - \gamma_1^+ = 0$$

En effet, pour tout $t \in [\gamma_1^+, \gamma_2^+]$ nous avons :

$$u^* - L \leq u(t)$$

Intégrons (2.5) sur $[\gamma_1^+, \gamma_2^+]$ il vient :

$$\inf\{f(\lambda, s)/s \in [s_n - L, s_n]\}(\gamma_2^+ - \gamma_1^+) \leq y(\gamma_1^+) - y(\gamma_2^+) = 4M$$

et puisque $\lim_{s\to+\infty} f(\lambda, s) = +\infty$ uniformément en λ, il suit :

$$\lim_{n\to+\infty} \gamma_2^+ - \gamma_1^+ = 0$$

Finalement il résulte :

$$\liminf_{u^*\to+\infty} \beta^+ - \alpha^+ < b - a$$

$2^{ème}$ *étape* : Nous allons montrer que si $\limsup_{s\to+\infty} \dfrac{f(s)}{\phi_p(s)} = \nu'$ alors

$$\frac{\Pi_p}{(\nu')^{1/p}} \leq \liminf_{u^*\to+\infty} \beta^+ - \alpha^+$$

Prenons $\eta = \nu' + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$, on vérifie facilement que la fonction $s \mapsto \dfrac{1}{p}\eta s^p - F(s)$ est croissante et non bornée pour s positif assez grand, plus précisément pour $|s| \geq c$ (où c donné plus haut).
Utilisons ceci dans (3.3) et en vertu de (3,4) nous avons pour tout $t \in [\alpha^+, \gamma_1^+]$:

$$(u'(t))^p \leq \frac{p^*}{p}\max(\nu,\eta)(u^{*p} - u(t)^p) + c_1 u'(t) + c_2$$

Puis, en utilisant l'inégalité de Young, nous obtenons :

$$(u'(t) - \varepsilon)^p \leq \frac{p^*}{p}\max(\nu,\eta)(u^{*p} - u(t)^p) + b$$

où b est une constante qui dépend de ε et de h, ou encore

$$u'(t) \leq (\frac{p^*}{p}\max(\nu,\eta)(u^{*p} - u(t)^p))^{1/p} + m$$

et par le même argument que précédemment nous obtenons que :

$$\frac{\Pi_p}{(\nu')^{1/p}} \leq \liminf_{u^*\to+\infty} \beta^+ - \alpha^+ \qquad \text{pour tout } \varepsilon > 0$$

Alors il suit :

$$\frac{\Pi_p}{(\eta)^{1/p}} \leq \liminf_{u^*\to+\infty} \beta^+ - \alpha^+ \qquad \text{uniformément en } \lambda \in [0,1]$$

Comme $\nu' \leq \lambda_2(p)$, il résulte :

$$\frac{b-a}{2} \leq \liminf_{u^*\to+\infty} \beta^+ - \alpha^+$$

Ce qui achève la preuve. ∎

Finalement, des lemmes 2.2 et 3.1 nous avons l'existence d'une solution du problème $(\mathcal{P})$.

3.2 Preuve du théorème 1.2

Pour la preuve de ce théorème nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.2 *Pour tout* $(L_1^+, K_1^+) \in [\lambda_1, \nu[\times]K_+(p), \lambda_2]$ *et* $(L_1^-, K_1^-) \in [\lambda_1, \nu[\times]K_-(p), \lambda_2]$ *avec* $\liminf_{s\to\pm\infty} \dfrac{pF(s)}{|s|^p} > \nu$ *nous avons :*

i) $\dfrac{1}{(L_1^+)^{1/p}}\Pi_p(\dfrac{L_1^+}{K_1^+}) < \liminf_{u^*\to+\infty} \beta^+ - \alpha^+ < b - a$ *uniformément en* λ

ii) $\dfrac{1}{(L_1^-)^{1/p}}\Pi_p(\dfrac{L_1^-}{K_1^-}) < \liminf_{u^*\to-\infty} \beta^- - \alpha^- < b - a$ *uniformément en* λ

Preuve

Nous allons montrer le premier point et le deuxième point s'obtient de la même manière

En notant $g(\lambda, s) = \lambda F(s) + \dfrac{1}{p}(1-\lambda)\nu s^p$, avec $\lambda \in [0,1]$ et ν est fixé, (3.3)devient :

$$\frac{p}{p^*}[u'(t)^p] = p(F(\lambda, u^*) - F(\lambda, u(t))) + \lambda p \int_t^{x^*} h(s)u'(s)ds \tag{3.7}$$

pour tout $t \in [\alpha^+, \gamma_1^+]$, et nous avons

$$L_1^+ < \liminf_{s\to+\infty} \frac{pg(\lambda, s)}{s^p} \leq \limsup_{s\to+\infty} \frac{pg(\lambda, s)}{s^p} < K_1^+$$

D'où pour un $\delta > 0$ et pour $s \geq c$ on peut supposer

$$L_1^+ + \delta \leq \frac{pg(\lambda, s)}{s^p} \leq K_1^+$$

Ensuite il vient :

$$\frac{p}{p^*}[u'(t)^p] \leq (K_1^+ u^{*p} - (L_1^+ + \delta)u(t)^p) + \lambda p \int_t^{x^*} h(s)u'(s)ds \tag{3.8}$$

Par le même argument utilisé dans la preuve du lemme 3.1 il vient :

$$u'(t) \leq \frac{p}{p^*}(K_1^+ u^{*p} - (L_1^+ + \delta)u(t)^p)^{1/p} + m$$

En suivant les mêmes lignes que dans la preuve du lemme 3.1 il suit :

$$\frac{1}{(L_1^+ + \delta)^{1/p}}\Pi_p(\frac{(L_1^+ + \delta)}{K_1^+}) < \liminf_{u^*\to+\infty} \beta^+ - \alpha^+$$

Puisque $x \mapsto \frac{1}{x^{1/p}}\Pi_p(x)$ est croissante alors nous avons l'inégalité gauche de *i)*. D'autre part, puisque $\nu < \limsup_{s\to\infty} \dfrac{pF(s)}{s^p}$ et en utilisant le résultat du lemme 3.1 nous avons

$$\liminf \beta^+ - \alpha^+ < b - a$$

Ce qui achève la preuve. ∎

Puisque $((L_+(p), K_+(p)), (L_-(p), K_-(p))) \in B$, il existe $((s,t),(x,y)) \in A$ tel que $(L_+(p), K_+(p)) \in]s,t[^2$ et $(L_-(p), K_-(p)) \in]x,y[^2$. Nous choisissons $((L_1^+, K_1^+)$ et (L_1^-, K_1^-) de telle sorte que $L_1^+ = s, L_1^- = x, K_1^+ \in [s,t]$ et $K_1^- \in [x,y]$. D'où nous obtenons :

$$\frac{1}{(L_1^+)^{1/p}}\Pi_p(\frac{L_1^+}{K_1^+}) + \frac{1}{(L_1^-)^{1/p}}\Pi_p(\frac{L_1^-}{K_1^-}) \geq b-a \tag{3.9}$$

Or d'après les lemmes 2.2 et 3.2 on conclut que le problème $(\mathcal{P})$ est solvable pour tout $h \in L^1(a,b)$. ■

4 Remarques

Remarque 2: Nous pouvons établir d'une manière "duale" à Celle du théorème 1.1 le résultat suivant :

Théoreme 4.1 *Supposons que sign$(s)f(s) \to +\infty$, quand $|s| \to +\infty$*

$$\lambda_1(p) < \limsup_{s\to\pm\infty} \frac{pF(s)}{|s|^p}, \quad \limsup_{s\to-\infty} \frac{f(s)}{\phi_p(s)} \leq \lambda_2(p)$$

et

$$\limsup_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{\phi_p(s)} < \lambda_2(p)$$

Alors $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution pour tout $h \in L^1(a,b)$.

Remarque 3: Considérons le problème suivant :

$$(4.1) \qquad \begin{cases} -(\phi_p(u'))' &= f(x,u) + h(x) \qquad \text{dans }]a,b[\\ u(a) &= u(b) = 0 \end{cases}$$

où $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfait à la condition de Carathéodory (c'est à dire $f(x,.)$ est continue pour p.p. dans [a,b], $f(.,s)$ est mesurable pour tout $s \in \mathbb{R}$) et pour chaque $k > 0$ il existe ψ_k dans $L^1(a,b)$ telle que :

$$|f(x,s)| \leq \psi_k(x) \text{ pour p.p. dans [a,b] et pour tout } |s| < k.$$

En suivant les mêmes lignes que dans la preuve du théorème 1.1 nous pouvons établir le résultat suivant :

Théoreme 4.2 *Supposons qu'il existe deux fonctions continues $f_\pm : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\lim_{s\to\pm\infty} = f_\pm(s) = +\infty$, $f(x,s) \leq f_-(s)$ pour tout $s \leq -c_0$ et p.p. dans [a,b], $f(x,s) \leq f_+(s)$ pour tout $s \geq c_0$ et p.p. dans $[a,b]$ et $\lambda_1(p) < \limsup_{s\to\pm\infty} \frac{pF(s)}{|s|^p}$, ou l'une des deux conditions :*

1. *$\limsup_{s\to+\infty} \frac{f(x,s)}{\phi_p(s)} \leq \lambda_2(p)$ et $\limsup_{s\to-\infty} \frac{f(x,s)}{\phi_p(s)} < \lambda_2(p)$ uniformément en $x \in [a,b]$.*

2. $\limsup_{s\to-\infty} \dfrac{f(x,s)}{\phi_p(s)} \le \lambda_2(p)$ *et* $\limsup_{s\to+\infty} \dfrac{f(x,s)}{\phi_p(s)} < \lambda_2(p)$ *uniformément en* $x \in [a,b]$.

Alors le problème (4.1) est solvable pour tout $h \in L^1(a,b)$.

5 Exemples

Nous allons donner deux exemples d'application des théorèmes précédents dans le cas $p = 2$.

Exemple 1:
soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(s) = \begin{cases} 2s(1+\sin(s)) + \ln s & \text{si} \quad s \ge 1 \\ as + a & \text{si} \quad -1 \le s \le 1 \\ s\sin(\ln(1-s)) - \frac{s^2}{2}\cos(\ln(1-s))\frac{1}{1-s} + 2s & \text{si} \quad s \le -1 \end{cases}$$

avec $a = ((1+\sin 1) - \frac{1}{2}\sin(\ln 2) - \frac{1}{4}\cos(\ln 2)$
Par un calcul simple nous avons :

$$F(s) = \begin{cases} s^2 - 2s\cos s + \sin s + \int_0^s \ln t\, dt & \text{si} \quad s \ge 1 \\ a\dfrac{s^2}{2} + as & \text{si} \quad -1 \le s \le 1 \\ s^2\sin(\ln(1-s)) + s^2 & \text{si} \quad s \le -1 \end{cases}$$

Nous vérifions facilement que

$\liminf_{s\to+\infty} \dfrac{f(s)}{s} = 0$, $\lim_{s\to+\infty} \dfrac{2F(s)}{s^2} = 2$, $\limsup_{s\to+\infty} \dfrac{f(s)}{s} = 4$
$\liminf_{s\to-\infty} \dfrac{f(s)}{s} = \frac{1}{2}$, $\liminf_{s\to-\infty} \dfrac{2F(s)}{s^2} = 1$, $\limsup_{s\to-\infty} \dfrac{2F(s)}{s^2} = 3$, $\limsup_{s\to-\infty} \dfrac{f(s)}{s} = \dfrac{7}{2}$ et $sign(s)f(s) \to +\infty$, quand $|s| \to +\infty$. Donc d'après le théorème 1.1, pour tout $h \in L^1(0,\pi)$, le problème

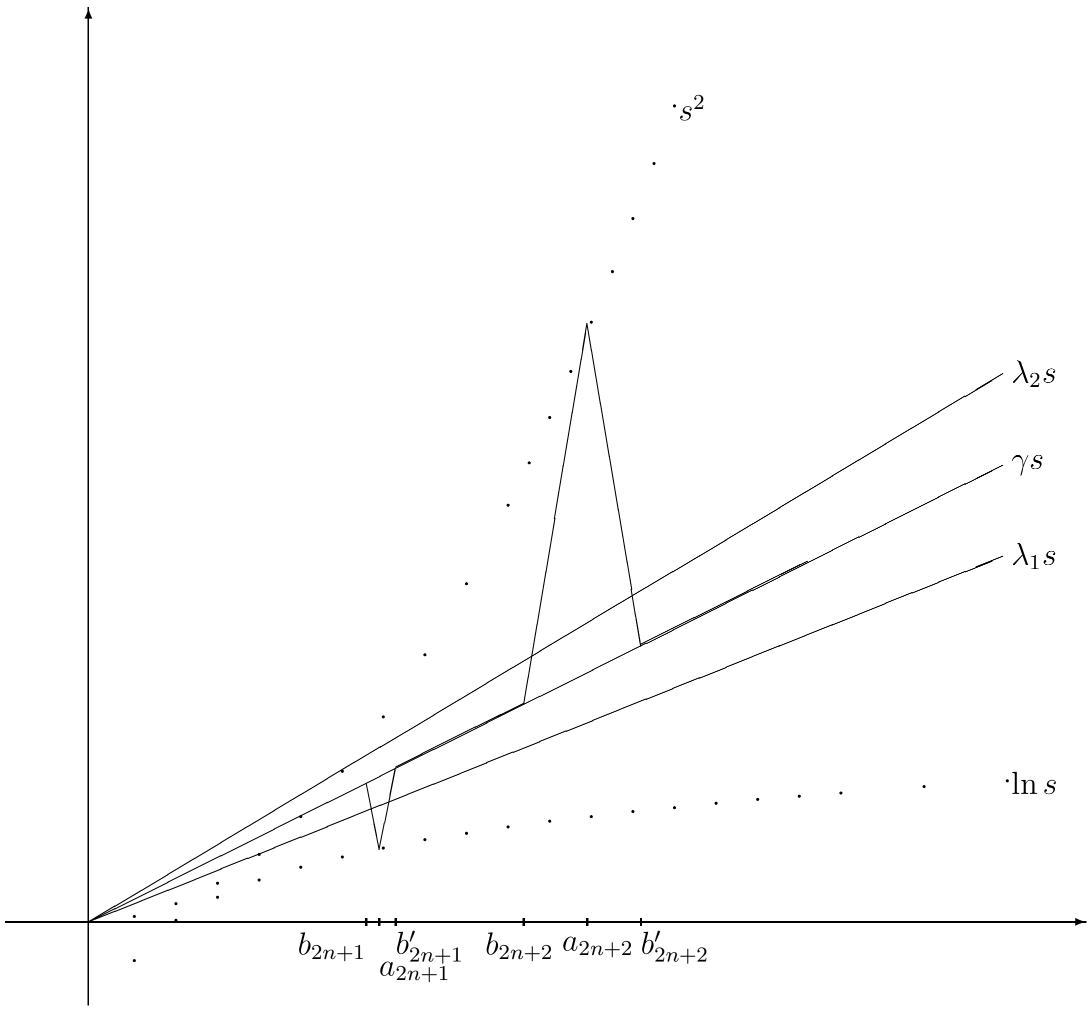
$$\begin{cases} -u'' &= f(u) + h(x) \\ u(0) &= u(\pi) = 0 \end{cases}$$

admet au moins une solution. Notons que cet exemple ne peut être traité ni par le résultat de [D-O], ni par celui de [N-Z].

Exemple 2: Soient $a_o = 0, a_n = 2^n, b_n = 2^n - \frac{1}{2^{3n+1}}, b'_n = 2^n + \frac{1}{2^{3n+1}}, n \ge 1, \gamma \in]\lambda_1, \lambda_2[$.
soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire définie par

$$f(s) = \begin{cases} s & si \quad s \in [0, 31/16] \cup [b_{2n+1}, b_{2n+2}] \cup [b_{2n+2}, b_{2n+3}] \ et\ n \ge 0 \\ \ln a_{2n+1} & si \quad s = a_{2n+1}\ et\ n \ge 0 \\ (a_{2n+2})^2 & si \quad s = a_{2n+2}\ et\ n \ge 0 \end{cases}$$

et en connectant les valeurs aux points b_n, a_n, b'_n d'une manière linéaire comme le décrit la figure suivante :



Nous avons :
$\liminf_{s\to\pm\infty} \dfrac{f(s)}{s} = 0$, $\lim_{s\to\pm\infty} \dfrac{2F(s)}{s^2} = \gamma$, $\limsup_{s\to\pm\infty} \dfrac{f(s)}{s} = \infty$
et $sign(s)f(s) \to +\infty$, quand $|s| \to +\infty$.
Donc d'après le théorème 1.2, le problème $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution.

Nous remercions Mr J.P.GOSSEZ pour diverses remarques liées à notre étude.

Références

[C-O] D.G.Costa,A.Oliveira, *Existence of solution for a class of semi linear elliptic problems at double resonance* Boll. Soc. Bras. Mat., 19(1) (1988), 21-37.

[D-O] D.Del.Santo et P.Omari, *Nonresonance conditions on the potentiel for a semilinear elleptic problem*, J. Differential Equations, 108 (1994) 120-138.

[D-E-M] M.Del.Pino, M.Elgueta et R.Manasevich, *A homotopic deformation along p of a Leray-Schauder degree result and existence for* $(|u'|^{p-2}u')' + f(t,u) = 0$, $u(0) = u(T) = 0$, $p > 1$. Preprint 1989.

[D] C.L.Dolph, *Nonlinear integral equations of the Hammertein type*, Trans.Amer.Math.SOC., 66(1949), 289-307.

[M-W-W] J.Mawhin, J.R.Ward, M.Willem, *Necessary and sufficient conditions for the solvability of a non linear tow-point boundary value problem*, Proc. Amer. Math. Soc, 93, 667-684 (1985).

[M-W] J.Mawhin, M.Willem, *Critical points of convex perturbations of some indefinite quadratic forms and semilinear boundary value problems at resonance*, Ann. Inst. Herni Poincaré 6(1986), 431-453.

[N-Z] F.I. Njoku et F.Zanolin, *On the solvability of a non linear Two-Point BVP between the first two eigenvalues*, Differential and Integral Equations, 3(1990), 571-588.

[O-Z] P. Omari, F.Zanolin, *Nonresonance conditions on the potentiel for a second order periodic boundary value problems*, (1992).

A.R. El Amrouss et M.Moussaoui
Université Mohammed I
Faculté des sciences
Département de mathématiques
et informatique
Oujda, Maroc