

Problème mixte avec conditions intégrales pour une classe d'équations hyperboliques

Abdelfatah Bouziani

Nour-Eddine Benouar

Résumé

Dans cet article, on étudie un problème mixte avec conditions intégrales pour une classe d'équations hyperboliques. On montre l'existence et l'unicité de la solution. La démonstration est basée sur deux estimations a priori et sur la densité de l'ensemble des valeurs de l'opérateur engendré par le problème étudié.

Abstract

In this paper, we study a mixed problem with boundary integral conditions for a class of hyperbolic equations. The existence and uniqueness of the solution are proved. The proof is based on two a priori estimates and the density of the range of the operator generated by the studied problem.

1 Position du problème

Dans le rectangle $Q = (0, l) \times (0, T)$ où $l < \infty$ et $T < \infty$, on considère l'équation différentielle :

$$(1.1) \quad \mathcal{L}v = v_{tt} - (a(x, t)v_x)_x + b(x, t)v_x + c(x, t)v = f(x, t)$$

où les fonctions $a(x, t)$, $b(x, t)$ et $c(x, t)$ satisfont aux conditions

Received by the editors February 1995 — In revised form : July 1995.

Communicated by P. Laubin.

1991 *Mathematics Subject Classification* : 51E20.

Key words and phrases : Integral conditions, a priori estimates, hyperbolic equation.

$$\text{H1. } 0 \leq c_0 \leq a(x, t) \leq c_1, c_2 \leq a_x(x, t) \leq c_3, a_t(x, t) \geq c_4.$$

$$\text{H2. } c_5 \leq b(x, t) \leq c_6, b_x(x, t) \leq c_7.$$

$$\text{H3. } c_8 \leq c(x, t) \leq c_9, c_x(x, t) \leq c_{10}, c_t(x, t) \leq c_{11}.$$

Dans les conditions ci-dessus, ainsi que dans toute la suite $c_i, i = 0, \dots, 18$, sont des constantes strictement positives.

A l'équation (1.1), on associe les conditions initiales,

$$(1.2) \quad \ell_1 v = v(x, 0) = \phi(x)$$

$$\ell_2 v = v_t(x, 0) = \Psi(x)$$

et les conditions intégrales,

$$(1.3) \quad \int_0^l v(x, t) dx = E(t), \quad xv(x, t) dx = \xi(t).$$

Ce type de problèmes est rencontré par exemple dans l'étude du problème du mouvement dans un milieu continu élastique, isotrope et non homogène. Les problèmes mixtes avec les conditions intégrales ont été étudiés pour les équations paraboliques du second degré à une dimension dans les articles [1-7] par différentes méthodes. Dans ce travail, sur la base de deux estimations a priori en suivant le schéma proposé dans [6], on montre l'existence et l'unicité de la solution du problème (1.1) - (1.3). Dans ce but, il est commode de faire un changement de fonction inconnue qui transforme le problème initial à conditions aux limites non homogènes en un problème à conditions homogènes. Pour cela, on pose

$$u(x, t) = v(x, t) - \mathcal{U}(x, t)$$

où

$$\mathcal{U}(x, t) = \frac{1}{l} E(t) + \frac{6}{l^4} (3x^2 - 2lx) \cdot [2\xi(t) - lE(t)]$$

On se ramène donc au problème

$$(1.4) \quad \mathcal{L}u = f - \mathcal{L}\mathcal{U} = f$$

$$(1.5) \quad \ell_1 u = u(x, 0) = \phi(x) - \ell_1 \mathcal{U} = \varphi(x)$$

$$\ell_2 u = u_t(x, 0) = \Psi(x) - \ell_2 \mathcal{U} = \psi(x)$$

$$(1.6) \quad \int_0^l u(x, t) dx = 0, \quad \int_0^l xu(x, t) dx = 0.$$

Et nous chercherons au lieu de la fonction v , la fonction u , en la trouvant, nous trouverons par là, la fonction $v = u + \mathcal{U}$ solution du problème (1.1)-(1.3).

Le problème (1.4)-(1.6) peut être écrit sous la forme opérationnelle

$$Lu = \mathcal{F}$$

où $L = (\mathcal{L}, \ell_1, \ell_2)$, $\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi)$. L'opérateur L est considéré de $D(L) = B$ dans F , où B est l'espace de Banach constitué des fonctions $u \in L_2(Q)$, vérifiant les conditions (1.6) et dont la norme finie

$$\begin{aligned} \|u\|_E^2 = & \int_Q \left((\mathcal{I}_x u_{tt})^2 + (\mathcal{I}_x u_{xx})^2 + (\mathcal{I}_x u_x)^2 \right) dx dt + \\ & \sup_{0 \leq \tau \leq T} \int_0^l \left((u(x, \tau))^2 + (\mathcal{I}_x u(x, \tau))^2 + (\mathcal{I}_x u_t(x, \tau))^2 \right) dx \end{aligned}$$

et F l'espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(\mathcal{F}, W)_F = \int_Q \mathcal{I}_x f \cdot \mathcal{I}_x \omega dx dt + \int_0^l (\varphi \cdot \omega_1 + \mathcal{I}_x \varphi \cdot \mathcal{I}_x \omega_1 + \mathcal{I}_x \psi \cdot \mathcal{I}_x \omega_2) dx$$

où $\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi)$ et $W = (\omega, \omega_1, \omega_2)$ sont deux éléments de F . La norme dans F associée au produit scalaire est définie par

$$\|\mathcal{F}\|_F^2 = \int_Q (\mathcal{I}_x f)^2 dx dt + \int_0^l \left((\varphi^2 + (\mathcal{I}_x \varphi)^2 + (\mathcal{I}_x \psi)^2) dx \right)$$

On suppose que les fonctions φ et ψ vérifient les conditions de compatibilité du type (1.6).

2 Estimations a priori

Théorème 1 : *Si les coefficients de l'équation (1.1) satisfont aux conditions H1 - H3, on a l'estimation*

$$(2.1) \quad \|Lu\|_F \leq c \|u\|_B$$

où c est une constante positive indépendante de u .

Démonstration : Appliquons l'opérateur \mathcal{I}_x à l'équation (1.4), il vient

$$\begin{aligned} (2.2) \quad \int_Q (\mathcal{I}_x \mathcal{L}u)^2 dx dt & \leq 4 \int_Q (\mathcal{I}_x u_{tt})^2 + c_1^2 (\mathcal{I}_x u_{xx})^2 + \\ & (c_3^2 + c_6^2) (\mathcal{I}_x u_x)^2 + c_8^2 (\mathcal{I}_x u)^2 dx dt \leq \\ & 4 \int_Q \left((\mathcal{I}_x u_{tt})^2 + c_1^2 (\mathcal{I}_x u_{xx})^2 + (c_3^2 + c_6^2) (\mathcal{I}_x u)^2 \right) dx dt \\ & + 4T c_8^2 \sup_{0 \leq \tau \leq T} \int_0^l (\mathcal{I}_x u(x, \tau))^2 dx \end{aligned}$$

et les conditions initiales (1.5) entraînent que

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left((\ell_1 u)^2 + (\mathcal{I}_x \ell_1 u)^2 + (\mathcal{I}_x \ell_2 u)^2 \right) dx \\ & \leq \sup_{0 \leq \tau \leq T} \int_0^l \left((u(x, \tau))^2 + (\mathcal{I}_x u(x, \tau))^2 + (\mathcal{I}_x u_t(x, \tau))^2 \right) dx \end{aligned}$$

En combinant (2.2) et (2.3), l'inégalité (2.1) découle immédiatement, avec $c^2 = \max(4, 4c_1^2, 4(c_3^2 + c_6^2), 4Tc_8^2)$ ■

Théorème 2 : *Dans les mêmes conditions que le théorème 1, on a l'estimation,*

$$(2.4) \quad \|u\|_B \leq c \|Lu\|_F$$

où c est une constante positive indépendante de u .

Démonstration : Multiplions l'équation (1.4) par $Mu = -2\mathcal{I}_x^2 u_t$, et intégrons sur le sous domaine $Q^\tau = (0, l) \times (0, \tau)$ où $0 \leq \tau \leq T$, on obtient,

$$\begin{aligned} & \int_Q \mathcal{L}u \cdot Mu \, dx \, dt = \\ & = \int_0^l \left(a(x, \tau)u^2(x, \tau) + c(x, \tau)(\mathcal{I}_x u(x, \tau))^2 + (\mathcal{I}_x u_t(x, \tau))^2 \right) dx \\ & - \int_0^l \left(a(x, 0)\varphi^2 + c(x, 0)(\mathcal{I}_x \varphi)^2 + (\mathcal{I}_x \psi)^2 \right) dx \\ & + \int_{Q^\tau} \left(a_t(x, t)u^2 + c_t(x, t)(\mathcal{I}_x u)^2 \right) dx \, dt \\ & + \int_{Q^\tau} \left(b_x(x, t)u + c_x(x, t)\mathcal{I}_x u \right) \cdot \mathcal{I}_x^2 u_t \, dx \, dt \\ & + \int_{Q^\tau} \left(b(x, t) - a_x(x, t) \right) \cdot u \mathcal{I}_x u_t \, dx \, dt. \end{aligned}$$

D'où en tenant compte des conditions sur les coefficients, en utilisant l'inégalité du type Poincaré

$$\int_{Q^\tau} (\mathcal{I}_x u_t)^2 \, dx \, dt \leq \frac{l^2}{2} \int_{Q^\tau} (\mathcal{I}_x u_t)^2 \, dx \, dt$$

et l'inégalité de Cauchy - Schwarz, on obtient

$$(2.5) \quad \begin{aligned} & \int_0^l \left(u^2(x, \tau) + (\mathcal{I}_x u(x, \tau))^2 + (\mathcal{I}_x u_t(x, \tau))^2 \right) dx \\ & \leq c_{12} \left(\int_{Q^\tau} (\mathcal{I}_x f)^2 \, dx \, dt + \int_0^l (\varphi^2 + (\mathcal{I}_x \varphi)^2 + (\mathcal{I}_x \psi)^2) \, dx \right. \\ & \quad \left. + \int_{Q^\tau} (u^2 + (\mathcal{I}_x u)^2 + (\mathcal{I}_x u_t)^2) \, dx \, dt \right). \end{aligned}$$

$$\text{où } c_{12} = \frac{\max(1, c_1, c_8, c_{11}, \frac{1}{2}(1 + l^2 + \frac{c_7^2 l^2}{c_4} + \frac{c_{10}^2 l^2}{2c_{11}}))}{\min(1, c_0, c_8)}$$

Appliquons à l'équation (1.4) l'opérateur \mathcal{I}_x et intégrons sur Q^τ , on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{Q^\tau} \left((\mathcal{I}_x u_{tt})^2 + (\mathcal{I}_x u_{xx})^2 + (\mathcal{I}_x u_x)^2 \right) dx dt \\ & \leq c_{13} \int_{Q^\tau} \left((\mathcal{I}_x f)^2 + (\mathcal{I}_x u_t)^2 \right) dx dt \end{aligned}$$

En ajoutant (2.5) à cette dernière inégalité, il vient

$$\begin{aligned} & \int_{Q^\tau} \left((\mathcal{I}_x u_{tt})^2 + (\mathcal{I}_x u_{xx})^2 + (\mathcal{I}_x u_x)^2 \right) dx dt + \\ & \int_0^l \left(u^2(x, \tau) + (\mathcal{I}_x u(x, \tau))^2 + (\mathcal{I}_x u_t(x, \tau))^2 \right) dx \\ & \leq c_{14} \left(\int_{Q^\tau} (\mathcal{I}_x \mathcal{L}u)^2 dx dt + \int_0^l \left(\varphi^2 + (\mathcal{I}_x \varphi)^2 + (\mathcal{I}_x \psi)^2 \right) dx \right. \\ & \quad \left. + \int_{Q^\tau} \left(u^2 + (\mathcal{I}_x u)^2 + (\mathcal{I}_x u_t)^2 \right) dx dt \right). \end{aligned}$$

Pour continuer, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 1 : Si $f_1(t)$, $f_2(t)$ et $f_3(t)$ sont des fonctions non négatives sur $[0, T]$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ sont intégrables et $f_3(t)$ non décroissante, alors de l'inégalité

$$\int_0^\tau f_1(t) dt + f_2(\tau) \leq f_3(\tau) + c \int_0^\tau f_2(t) dt$$

découle l'inégalité

$$\int_0^\tau f_1(t) dt + f_2(\tau) \leq e^{c\tau} f_3(\tau)$$

La démonstration de ce lemme est analogue à celle du lemme 7.1 dans [8]. ■

Revenons à la démonstration du théorème, on dénote la somme des trois premiers termes de la partie gauche de l'inégalité (2.6) par $\int_0^\tau f_1(t) dt$, la somme des trois termes suivants dans la même partie par $f_2(\tau)$ et la somme des quatre premiers termes de la partie droite de (2.6) par $f_3(\tau)$. En appliquant le lemme 1 à l'inégalité (2.6), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{Q^\tau} \left((\mathcal{I}_x u_{tt})^2 + (\mathcal{I}_x u_{xx})^2 + (\mathcal{I}_x u)^2 \right) dx dt + \\ & \int_0^l \left(u^2(x, \tau) + (\mathcal{I}_x u(x, \tau))^2 + (\mathcal{I}_x u_t(x, \tau))^2 \right) dx \\ & \leq c_{15} \exp(c_{15}\tau) \cdot \left(\int_{Q^\tau} (\mathcal{I}_x \mathcal{L}u)^2 dx dt + \int_0^l \left(\varphi^2 + (\mathcal{I}_x \varphi)^2 + (\mathcal{I}_x \psi)^2 \right) dx \right) \\ & \leq c_{16} \left(\int_{Q^\tau} (\mathcal{I}_x \mathcal{L}u)^2 dx dt + \int_0^l \left(\varphi^2 + (\mathcal{I}_x \varphi)^2 + (\mathcal{I}_x \psi)^2 \right) dx \right) \end{aligned}$$

Comme la partie droite de l'inégalité ainsi obtenue est indépendante de τ , on passe dans la partie gauche au supremum par rapport à τ de 0 à T , on obtient l'inégalité (2.4). Ce qui achève la démonstration du théorème 2. ■

3 Existence et unicité de la solution

Théorème 3 : *Si les conditions du théorème 1 sont satisfaites, si $a(x, t)$ possède dans \bar{Q} des dérivées bornées par rapport à t jusqu'au second ordre inclus. Alors pour tout $\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi)$, il existe une solution $u = L^{-1}\mathcal{F}$ du problème (1.4) - (1.6), vérifiant l'estimation,*

$$\|u\|_B \leq c\|\mathcal{F}\|_F$$

où c est une constante positive indépendante de u .

Démonstration : De l'inégalité (2.1) on déduit que l'opérateur L de B dans F est continu, et de l'inégalité (2.4) il s'ensuit qu'il admet un inverse L^{-1} continu, et que l'ensemble des valeurs $R(L)$ est fermé; i.e., L réalise un homéomorphisme linéaire de l'espace B sur l'ensemble fermé $R(L) \subset F$. Pour montrer que le problème (1.4) - (1.6) possède une solution unique, il suffit de montrer la densité de l'ensemble $R(L)$ dans F . Pour cela on montre la proposition suivante :

Proposition : *Si les conditions du théorème 3 sont satisfaites, si pour tout $u \in D_0(L) = \{u \mid u \in D(L) : \ell_1 u = 0 \text{ et } \ell_2 u = 0\}$ et si pour $\mathcal{I}_x \omega \in L_2(Q)$, on a*

$$(3.1) \quad \int_{Q^\tau} \mathcal{I}_x \mathcal{L}u \cdot \mathcal{I}_x \omega \, dx \, dt = 0$$

Alors ω s'annule presque partout dans Q .

Démonstration de la proposition : La relation (3.1) est donnée pour tout $u \in D_0(L)$ en utilisant ce fait, on peut l'exprimer sous une forme spéciale. Premièrement, on définit h par la relation

$$h = \mathcal{I}_x^* \omega = \int_t^T \omega \, d\tau$$

Soit u_{tt} solution de l'équation

$$(3.2) \quad a(\sigma, t)u_{tt} = h$$

où σ est un nombre fixé appartenant à $(0, l)$. Et soit

$$(3.3) \quad u = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq s \\ \int_s^t (t - \tau)u_{\tau\tau} d\tau & s \leq t \leq T \end{cases}$$

On a maintenant

$$(3.4) \quad \omega = \mathcal{I}_t^{*-1} h = -(a(\sigma, t)u_{tt})_t$$

Les relations (3.2) et (3.3) entraînent que u est dans $D_0(L)$.

Lemme 2 : *Si les conditions du théorème 3 sont satisfaites, alors la fonction u définie par (3.2) et (3.3) possède des dérivées par rapport à t jusqu'au troisième ordre appartenant à l'espace $L_2(Q_s)$, où $Q_s = (0, l) \times (s, T)$.*

Démonstration du lemme : Elle est basée sur les t -opérateurs de régularisation de Friedrichs (voir [8], lemme 9.1.).

Appliquons les opérateurs ρ_ε et $\frac{\partial}{\partial t}$ à l'équation (3.3), on aura

$$\begin{aligned} a(\sigma, t) \frac{\partial}{\partial t} \rho_\varepsilon u_{tt} &= \frac{\partial}{\partial t} (a(\sigma, t) \rho_\varepsilon u_{tt} - \rho_\varepsilon a(\sigma, t) u_{tt}) \\ &\quad - \frac{\partial a(\sigma, t)}{\partial t} \rho_\varepsilon u_{tt} + \frac{\partial}{\partial t} \rho_\varepsilon h \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned} \int_Q \left(a(\sigma, t) \frac{\partial}{\partial t} \rho_\varepsilon u_{tt} \right)^2 dx dt &\leq 3 \int_Q \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} \rho_\varepsilon h \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial}{\partial t} (a(\sigma, t) \rho_\varepsilon u_{tt} - \rho_\varepsilon a(\sigma, t) u_{tt}) \right)^2 + \left(\frac{\partial a(\sigma, t)}{\partial t} \rho_\varepsilon u_{tt} \right)^2 \right) dx dt \end{aligned}$$

En vertu des propriétés des t -opérateurs de régularisation, on a

$$\int_Q ((u_{ttt})^2 dx dt \leq c_{17} \int_Q \left((u_{tt})^2 + \frac{\partial}{\partial t} h \right)^2 dx dt$$

D'où la fonction u définie par (3.2) et (3.3) possède des dérivées par rapport à t jusqu'au troisième ordre inclus. ■

Revenons à la démonstration de la proposition en remplaçant ω dans (3.1) par sa représentation (3.4). Après intégration par parties, on obtient en tenant compte des conditions (1.6), des conditions sur les coefficients et de la forme spéciale donnée par (3.2) et (3.3) :

$$\begin{aligned} (3.5) \quad \int_0^l \left((\mathcal{I}_x u_{tt}(x, s))^2 + (u_t(x, T))^2 \right) dx &\leq \\ c_{18} \int_{Q_s} \left((\mathcal{I}_x u_{tt})^2 + (u_t)^2 \right) dx dt \end{aligned}$$

Pour continuer, on introduit une nouvelle fonction telle que

$$\theta(x, t) = \mathcal{I}_t^* u_{\tau\tau} = \int_t^T u_{\tau\tau} d\tau$$

et par conséquent $u_t(x, t) = \theta(x, s) - \theta(x, t)$, et on a

$$\begin{aligned} (3.6) \quad \int_0^l \left((\mathcal{I}_x u_{tt}(x, s))^2 + (1 - 2c_{18}(T - s))(\theta(x, s))^2 \right) dx &\leq \\ 2c_{18} \int_{Q_s} \left((\mathcal{I}_x u_{tt})^2 + (\theta(x, t))^2 \right) dx dt \end{aligned}$$

D'où si $s_0 > 0$ satisfait $2c_{18}(T - s_0) = 1/2$, (3.6) entraîne

$$(3.7) \quad \int_0^l \left((\mathcal{I}_x u_{tt}(x, s))^2 + (\theta(x, s))^2 \right) dx \leq 4c_{18} \int_{Q_s} \left((\mathcal{I}_x u_{tt})^2 + (\theta(x, t))^2 \right) dx dt$$

pour tout $s \in [T - s_0, T]$.

On pose $y(s) = \int_{Q_s} \left((\mathcal{I}_x u_{tt})^2 + (\theta(x, t))^2 \right) dx dt$.

Alors, on obtient de (3.7)

$$-\frac{dy(s)}{ds} \leq 4c_{18}y(s)$$

Par conséquent,

$$(3.8) \quad -\frac{d}{ds}(y(s) \exp(4c_{18}s)) \leq 0$$

En intégrant (3.8) sur (s, T) et en tenant compte du fait que $y(T) = 0$, on obtient

$$(3.9) \quad y(s) \exp(4c_{18}s) \leq 0$$

Il s'ensuit de (3.9) que $\omega = 0$ presque partout dans Q_{t-s_0} . La longueur s étant indépendante du choix de l'origine, en procédant avec le même raisonnement, au bout d'un nombre fini de fois on montre que $\omega = 0$ dans Q . ■

La proposition étant établie, revenons maintenant à la démonstration du théorème. Soit $W = (\omega, \omega_1, \omega_2) \in {}^\perp R(L)$, tel que

$$(3.10) \quad \int_Q \mathcal{I}_x \mathcal{L}u \mathcal{I}_x \omega \, dx \, dt + \int_0^l (\ell_1 u \cdot \omega_1 + \mathcal{I}_x \ell_1 u \cdot \mathcal{I}_x \omega_1 + \mathcal{I}_x \ell_2 u \cdot \mathcal{I}_x \omega_2) \, dx = 0$$

Si on considère un élément quelconque de $D_0(L)$, de (3.10) on obtient

$$\forall u \in D_0(L), \quad \int_Q \mathcal{I}_x \mathcal{L}u \mathcal{I}_x \omega \, dx \, dt = 0$$

D'où en vertu de la proposition, on déduit que $\omega = 0$. Donc à partir de (3.10), on obtient

$$\int_0^l (\ell_1 u \cdot \omega_1 + \mathcal{I}_x \ell_1 u \cdot \mathcal{I}_x \omega_1 + \mathcal{I}_x \ell_2 u \cdot \mathcal{I}_x \omega_2) \, dx = 0$$

Puisque $\ell_1 u$ et $\ell_2 u$ sont indépendants et les ensembles de valeurs des opérateurs ℓ_1 et ℓ_2 sont partout denses dans les espaces de Hilbert de normes respectivement $\left(\int_0^l (\omega_1^2 + (\mathcal{I}_x \omega_1)^2) \, dx \right)^{1/2}$, $\left(\int_0^l (\mathcal{I}_x \omega_2)^2 \, dx \right)^{1/2}$. D'où $\omega_1 = 0$ et $\omega_2 = 0$. Ce qui achève la démonstration du théorème 3. ■

Références

- [1] J.R. Cannon, The solution of the heat equation subject to the specification of energy, *Quart. Appl. Math.*, **21**, No2, 155-160, (1963).
- [2] N.I. Kamynin, A boundary value problem in the theory of the heat conduction with non classical boundary condition, *Th., Vychisl., Mat., Mat., Fiz.*, **41**, No6, 1006-1024, (1964).
- [3] N.I. Yurchuk, Problème mixte avec condition intégrale pour certaines équations paraboliques, *Differential Equations*, **22**, 2117-2126 (1986).
- [4] V. Kartynnik, Three point boundary value problem with an integral space variables conditions for second order parabolic equation, *Differentsial'nye Uravneniya*, **26**, No9, p 1568-1575 (1990)
- [5] E.A. Gasymov, Mixed problems on the conjugation of parabolic systems of different order with non local boundary conditions, *Differentsial'nye Uravneniya*, **26**, No8, p 1003-1012 (1991).
- [6] N. Benouar, N.I. Yurchuk, Problème mixte avec condition intégrale pour les équations paraboliques avec opérateur de Bessel, *Differentsial'nye Uravneniya*, **27**, No12, p 2094-2098 (1991).
- [7] P. Shi, Weak solution to an evolution problem with a nonlocal constraint, *Siam J. Math. Anal.* **24**, No1, 46-58 (1993).
- [8] L. Garding, Cauchy's problem for hyperbolic equations, University of Chicago (1957).

A. Bouziani
Institut National d'Enseignement Supérieur de Mécanique,
Oum El Bouaghi, Algérie.

N.E. Benouar
U.S.T.H.B., Institut de Mathématiques, El Alia,
BP No32, Bab Ezzouar,
16111, Alger, Algérie.