

Sobre la homología de algunos complejos especiales

Rafael Sánchez Lamonedá & Imtiaz Manji

Resumen

En dos artículos publicados en el journal of Algebra, [7] y [8], I. Manji y R. Sánchez dieron un criterio de acilicidad para los complejos de Schur y asociaron a este un algoritmo para el estudio de las homologías de estos complejos y similares. Utilizando esos resultados, en este artículo estudiamos las homologías de dos complejos especiales, el complejo de Cayley-Koszul y el complejo $S_k\phi$.

1 Introducción

Sea R_0 un anillo noetheriano. Dada una forma bilineal

$$A = \sum_{i,j} a_{ij}x_iy_j \in R_0[x_1, \dots, x_f, y_1, \dots, y_g],$$

le podemos asociar un complejo llamado de *Cayley-Koszul* y al cual denotaremos por \mathcal{K}_A . El interés en estos complejos surge en los trabajos sobre *hiperdeterminantes* que aparecen en [6] y en [11]. Cuando R_0 es un cuerpo, el estudio de su homología ha sido tratada previamente por Boffi [3] y Bruns y Vetter [5]. El principal resultado de Boffi es el cálculo de la homología de \mathcal{K}_A cuando $f = g$ y (a_{ij}) es una matriz inversible sobre el cuerpo R_0 de característica cero. Posteriormente Bruns y Vetter demostraron que la suposición sobre la característica es superflua. En este trabajo presentamos un estudio de las homologías de estos complejos cuando están definidos sobre un anillo noetheriano en vez de un cuerpo. Además complementamos con un estudio de las homologías de $S_k\phi$ donde $\phi : G \rightarrow F$ es un morfismo entre módulos libres de rangos finitos con $\text{rang } G \leq \text{rang } F$. En el caso de \mathcal{K}_A , calculamos su homología cuando $f = g$ y la profundidad de los ideales de menores $t \times t$ de la matriz (a_{ij}) es al menos $2(f - t) + 1$ para cada t . Esto generaliza el resultado de Boffi y además nos permite obtener otros resultados interesantes en el caso genérico. En relación al complejo $S_k\phi$, calculamos una cota superior para los grados de sus homologías no nulas. Ambos estudios son ejemplos interesantes de aplicación de las técnicas explicadas y publicadas en [7] y [8].

2 El Complejo de Cayley-Koszul

Sea entonces R_0 un anillo noetheriano y consideremos dos R_0 -módulos libres F_0 y G_0 de rangos f y g , respectivamente. Fijemos bases $\{f_i\}$ y $\{g_i\}$ de F_0 y G_0 respectivamente, y $R = S(F_0^* \oplus G_0^*)$. Tenemos entonces la identificación de R con el anillo de polinomios $R_0[x_1, \dots, x_f, y_1, \dots, y_g]$. Las variables x_i y y_j las identificamos con los duales de los elementos de las bases elegidas previamente para F_0 y G_0 , respectivamente.

Denotemos por A la forma bilineal $A = \sum_{i,j} a_{ij}x_iy_j \in R$, y sean F y G los R -módulos $F_0 \otimes R$ y $G_0 \otimes R$, respectivamente. Definamos ahora los R -homomorfismos

$$\psi: R \rightarrow F \oplus G \text{ y } \phi: F \oplus G \rightarrow R$$

por las fórmulas:

$$\begin{aligned} \psi(1) &= \sum_i x_i(f_i \otimes 1) + \sum_j y_j(g_j \otimes 1) \\ \phi(f_i \otimes 1) &= \frac{\partial A}{\partial x_i} \quad ; \quad \phi(g_j \otimes 1) = -\frac{\partial A}{\partial y_j}. \end{aligned}$$

Claramente la composición $\phi \circ \psi$ es igual a cero y entonces ϕ induce un morfismo $\bar{\phi}: M \rightarrow R$, donde M es el *coker* de ψ .

Definición 1. \mathcal{K}_A es el complejo de Koszul

$$\mathcal{K}(\wedge\phi) : \dots \rightarrow \wedge^i M \rightarrow \wedge^{i-1} M \rightarrow \dots \rightarrow \wedge^2 M \rightarrow M \xrightarrow{\bar{\phi}} R \rightarrow 0.$$

El complejo \mathcal{K}_A es un cociente del complejo de Koszul

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\phi) : 0 \rightarrow \wedge^{f+g}(F \oplus G) \rightarrow \wedge^{f+g-1}(F \oplus G) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \wedge^2(F \oplus G) \rightarrow \wedge^1(F \oplus G) \xrightarrow{\bar{\phi}} R \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Con mayor precisión, existe una sucesión exacta

$$\mathcal{K}(\phi)[-1] \rightarrow \mathcal{K}(\phi) \rightarrow \mathcal{K}_A \rightarrow 0,$$

donde la primera aplicación es la multiplicación por $\psi(1) \in \wedge^1(F \oplus G)$. Consideremos ahora la potencia simétrica $S_j(\phi_0)$, donde el morfismo $\phi_0: F_0 \oplus G_0 \rightarrow F_0^* \oplus G_0^*$ viene dado en términos de las bases que elegimos al comienzo por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & (-a_{ij}) \\ (a_{ij}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Explícitamente $S_j(\phi_0)$ es el sumando homogéneo,

$$\dots \rightarrow \wedge^2(F_0 \oplus G_0) \otimes S_{j-2}(F_0^* \oplus G_0^*) \rightarrow$$

$$\rightarrow \wedge^1(F_0 \oplus G_0) \otimes S_{j-1}(F_0^* \oplus G_0^*) \rightarrow S_j(F_0^* \oplus G_0^*) \rightarrow 0$$

de $\mathcal{K}(\phi)$.

Es fácil ver que la aplicación

$$\mathcal{K}(\phi)[-1] \longrightarrow \mathcal{K}(\phi)$$

se restringe a un morfismo

$$S_{j-2}(\phi_0)[-1] \longrightarrow S_j(\phi_0),$$

más aún, ella es una suma directa de estos morfismos. En consecuencia \mathcal{K}_A es una suma directa de los complejos

$$\mathcal{K}_A^j := \text{coker}(S_{j-2}(\phi_0)[-1] \longrightarrow S_j(\phi_0)).$$

En nuestro artículo [8] Cor.2.3 demostramos una proposición que luego tenía una interesante interpretación por medio de un algoritmo o juego combinatorio. Este algoritmo nos permitió obtener información sobre las homología de los complejos de Schur. Como será de importancia principal en nuestro presente trabajo, lo enunciamos a continuación como la

Proposición 2. *Sea $\varphi : G \longrightarrow F$ un homomorfismo de R -módulos libres, con $n = \text{rang } G \leq \text{rang } F = m$ y $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ una partición. Entonces*

- (i) $H_*(L_\lambda(\varphi)) = 0$ si $*$ $>$ $\Delta_1 + \dots + \Delta_n$.
- (ii) $\text{Supp}(H_*(L_\lambda(\varphi))) \subseteq V(I_n(\varphi))$ si $*$ $>$ 0 .
- (iii) Para cada $j = 1, \dots, n-1$, $\text{Supp}(H_*(L_\lambda(\varphi))) \subseteq V(I_{n-j}(\varphi))$, cuando $*$ $>$ $\Delta_1 + \dots + \Delta_j$. \square

Ahora estamos listos para prestar nuestra atención a los grupos de homología $H_*(\mathcal{K}_A)$. Para ello introduciremos un complejo doble de primer cuadrante $\mathbf{D}^j = \mathbf{D}_A^j$, el cual tiene la forma

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbf{3} & \wedge^3 H_0 \otimes S_{j-3} H_0^* & \leftarrow & \wedge^2 H_0 \otimes S_{j-4} H_0^* & \leftarrow & \wedge^1 H_0 \otimes S_{j-5} H_0^* & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \mathbf{2} & \wedge^2 H_0 \otimes S_{j-2} H_0^* & \leftarrow & \wedge^1 H_0 \otimes S_{j-3} H_0^* & \leftarrow & S_{j-4} H_0^* & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 \mathbf{1} & \wedge^1 H_0 \otimes S_{j-1} H_0^* & \leftarrow & S_{j-2} H_0^* & \leftarrow & \dots & \\
 & \downarrow & & & & & \\
 \mathbf{0} & S_j H_0^* & & & & & \\
 & \mathbf{0} & & \mathbf{1} & & \mathbf{2} &
 \end{array}$$

Donde $H_0 = F_0 \oplus G_0$. Las columnas están indicadas de izquierda a derecha, comenzando a la izquierda con la columna cero. Las filas están indicadas de abajo a arriba, comenzando con la fila cero. El complejo en la i -ésima columna de \mathbf{D}^j es $S_{j-2i}(\phi)$ trasladado i lugares hacia arriba, y los morfismos horizontales son las multiplicaciones por $\psi(1)$. Nuestro primer resultado nos da información sobre las homología del complejo total $\mathbf{Tot} \mathbf{D}^j$.

Lema 3. 1. Si $j \leq f + g$, entonces

$$H_*(\mathbf{Tot} \mathbf{D}^j) \cong H_*(\mathcal{K}_A^j).$$

2. Si $j > f + g$, entonces

$$H_*(\mathbf{Tot} \mathbf{D}^j) \cong \begin{cases} R_0, & \text{si } j \equiv f + g \pmod{2} \text{ y } * = j, \\ H_*(\mathcal{K}_A^j) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Demostración. Las filas de \mathbf{D}^j están compuestas de las ramas homogéneas y truncadas del complejo

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{\psi} \wedge^1(F \oplus G) \rightarrow \cdots \rightarrow \wedge^i(F \oplus G) \rightarrow \cdots \rightarrow \cdots$$

dual del complejo de Koszul (a veces se define este como el complejo de Koszul) el cual es exacto, con la excepción del término

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \wedge^{f+g}(F_0 \oplus G_0) \rightarrow 0 \rightarrow \cdots .$$

Este término aparece en \mathbf{D}^j si y sólo si $j \geq f + g$ y $j \equiv f + g \pmod{2}$. En este caso el término $\wedge^{f+g}(F_0 \oplus G_0) (\cong R_0)$ aparece en la columna $\frac{1}{2}(j - f - g)$ y tiene grado total j . El resultado sigue ahora al considerar los E_2 -términos de la sucesión espectral estándar asociada al complejo doble \mathbf{D}^j . \square

Lema 4. Existe una sucesión exacta larga

$$\cdots \rightarrow H_n(S_j(\phi_0)) \rightarrow H_n(\mathbf{Tot} \mathbf{D}^j) \rightarrow H_{n-2}(\mathbf{Tot} \mathbf{D}^{j-2}) \rightarrow H_{n-1}(S_j(\phi_0)) \rightarrow \cdots$$

para cada j .

Demostración. Solo hay que aplicar la sucesión de homología asociada a la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow S_j(\phi_0) \rightarrow \mathbf{Tot} \mathbf{D}^j \rightarrow \mathbf{Tot} \mathbf{D}^{j-2}[-2] \rightarrow 0 \quad \square$$

Ahora usaremos estos lemas para estudiar la homología de $H_*(\mathcal{K}_A)$.

Fijemos una forma bilineal

$$A = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j \in R_0[x_1, \dots, x_f, y_1, \dots, y_g],$$

y un entero positivo j . Denotemos por $I_t(A)$ al ideal generado por los menores $t \times t$ de la matriz (a_{ij}) , y sea $J_t(A)$ el ideal

$$\sum_{k+l=t} I_k(A)I_l(A).$$

A la forma A le asociamos una sucesión binaria $\mathbf{r}^j(A) = (r_1^j(A), \dots, r_j^j(A))$, definida de la siguiente manera: Comenzamos con

$$r_1^j(A) = \begin{cases} 1, & \text{si grado } J_1(A) > 0, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

luego continuamos inductivamente

$$r_t^j(A) = \begin{cases} 1, & \text{si grado } J_t(A) > r_1^j(A) + \dots + r_{t-1}^j(A), \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

para $t = 2, \dots, j$.

Es importante destacar que el ideal $J_t(A)$ es simplemente el ideal generado por los menores $t \times t$ de ϕ_0 . En particular si $j > f + g$, entonces $r_t^j(A) = 1$ para $t = f + g + 1, \dots, j$.

Lema 5. *Sea N el número de ceros que hay en una sucesión binaria $\mathbf{r}^j(A)$. Sea $t(i)$ el índice correspondiente al i -ésimo cero en $\mathbf{r}^j(A)$. Entonces*

1. $H_*(S_j(\phi_0)) = 0$ para $* > N$.
2. $\text{Supp } H_*(S_j(\phi_0)) \subseteq \mathbf{V}(J_{f+g-t(i)+1}(A))$ para $* \geq i$.

Demostración. Simplemente considere esto como un caso especial de la Proposición 2, aplicada al complejo de Schur $L_\lambda(\phi_0) (= S_j(\phi_0))$, cuando $\lambda = (1^j, 0, \dots, 0)$, donde 1^j significa que el 1 se repite j veces. Ahora si, podemos establecer los teoremas que nos indican el comportamiento de las homología de los complejos Cayley-Koszul.

Teorema 6. *Sea N el número de ceros que hay en una sucesión binaria $\mathbf{r}^j(A)$.*

1. *Si $j > f + g$ o j no es congruente con $f + g \pmod{2}$, entonces*

$$H_*(\mathcal{K}_A^j) = 0$$

para $ \geq N$.*

2. *Si $j \leq f + g$ y $j \equiv f + g \pmod{2}$, entonces*

$$H_*(\mathcal{K}_A^j) \equiv \begin{cases} 0, & \text{si } * \geq N \text{ y } * \neq j, \\ R_0, & \text{si } * = j \end{cases}$$

Demostración Es suficiente considerar $N \leq * \leq f + g$. Sabemos, por el lema 4, que $H_*(\mathcal{K}_A^j) \cong H_*(\text{Tot}\mathbf{D}^j)$. Más aún

$$H_n(\text{Tot}\mathbf{D}^j) \cong H_{n+2}(\text{Tot}\mathbf{D}^{j+2})$$

si $n \geq N$ (lemas 4 y 5). Iterando esto obtenemos, para cada $t \geq 0$:

$$H_*(\mathcal{K}_A^j) \cong H_{*+2t}(\text{Tot}\mathbf{D}^{j+2t}).$$

Tenemos entonces, por el lema 3.19, que si $j > f + g$, o $j \not\equiv f + g \pmod{2}$, o $* \neq j$:

$$H_{*+2t}(\text{Tot}\mathbf{D}^{j+2t}) \cong H_{*+2t}(\mathcal{K}_A^{j+2t})$$

pero el término $H_{*+2t}(\mathcal{K}_A^{j+2t})$ es cero para t suficientemente grande. Esto demuestra (1) y parte de (2). Supongamos ahora $* = j$, entonces por hipótesis $* + 2t = j + 2t$ y $j + 2t \equiv f + g \pmod{2}$. Entonces para t suficientemente grande,

$$H_{*+2t}(\text{Tot}\mathbf{D}^{j+2t}) \cong R_0 \quad \square$$

Teorema 7. Sean j un entero positivo y N el número de ceros que hay en una sucesión binaria $\mathbf{r}^j(A)$. Sea $t(i)$ el índice correspondiente al i -ésimo cero de $\mathbf{r}^j(A)$. Entonces

$$\text{Supp } H_{i-1}(\mathcal{K}_A^j) \subseteq \mathbf{V}(J_{f+g-t(i)+1}(A)).$$

Demostración: Sea \mathfrak{p} un ideal primo de R_0 que no contiene a $J_{f+g-t(i)+1}(A)$. Entonces la localización $H_n(S_j(\phi_0))_{\mathfrak{p}} = 0$ para $n \geq i$. Localizando la sucesión exacta del lema 4, tenemos que

$$H_n(\text{Tot } \mathbf{D}^j)_{\mathfrak{p}} \cong H_{n+2}(\text{Tot } \mathbf{D}^{j+2})_{\mathfrak{p}}$$

para $n \geq i - 1$. Por lo tanto, para cada $t \geq 0$, vale

$$H_n(\text{Tot } \mathbf{D}^j)_{\mathfrak{p}} \cong H_{n+2t}(\text{Tot } \mathbf{D}^{j+2t})_{\mathfrak{p}}$$

si $n \geq i - 1$. Ahora bien, si $n \leq f + g$, entonces

$$H_n(\text{Tot } \mathbf{D}^j)_{\mathfrak{p}} \cong H_n(\mathcal{K}_A^j)_{\mathfrak{p}}.$$

Tomando $n = i - 1 (\leq f + g)$, obtenemos

$$H_{i-1}(\mathcal{K}_A^j)_{\mathfrak{p}} \cong H_{i-1+2t}(\text{Tot } \mathbf{D}^{j+2t})_{\mathfrak{p}} \cong H_{i-1+2t}(\mathcal{K}_A^j + 2t)_{\mathfrak{p}}$$

pero el último término es cero para t suficientemente grande \square

Analicemos ahora el caso especial en el cual $f = g$.

¿Cómo es la homología de \mathcal{K}_A cuando $f = g$?

Dada una forma bilineal A como antes, sea j es un entero positivo, definimos

$$\lambda = \begin{cases} (2, \dots, 2, 0, \dots) & \text{si } j \text{ es par} \\ \underbrace{(2, \dots, 2)}_{\frac{j}{2}}, 1, 0, \dots & \text{si } j \text{ es impar} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\frac{j-1}{2}} \end{cases}$$

A continuación analizaremos los resultados anteriores desde un punto de vista algorítmico, o dicho de otra manera, con un enfoque combinatorio. El algoritmo consiste en marcar sucesivamente las casillas de la representación gráfica de la partición λ , en función de la información que nos da el grado de los ideales de menores $I_j(A)$ y se procede de la siguiente manera:

Algoritmo

1. Al inicio no hay casillas marcadas.
2. Para $i = 1, \dots, \lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor$ proceda así: Si la cantidad de casillas marcadas desde la primera hasta la i -ésima fila es estrictamente menor que grado $I_{f-i+1}(A)$, marque una casilla (en la fila i). Repita el procedimiento tantas veces sea posible.
3. Ultimo paso: Definimos $\widehat{\lambda}_i$ cantidad de casillas **no** marcadas en la i -ésima fila de la partición λ . Entonces, concluimos:

- a) Si $j \geq 2f$ o j es impar, tenemos

$$H_*(\mathcal{K}_A^j) = 0 \text{ si } * \geq \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 + \dots$$

- b) Si $j \leq 2f$ y j es par, tenemos

$$H_*(\mathcal{K}_A^j) = \begin{cases} R_0 & \text{si } * = j \\ 0 & \text{si } * \geq \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 + \dots \text{ y } * \neq j \end{cases}$$

Si observamos que:

$$I_t(A)^2 \subseteq J_{2t}(A) \subseteq J_{2t-1}(A) \subseteq I_t(A)$$

este algoritmo nos permite obtener una interpretación interesante de los teoremas anteriores.

Teorema 8. *Sea R el anillo de polinomios $R_0[x_1, \dots, x_f, y_1, \dots, y_f]$, sea $A = \sum_{i,j} a_{ij}x_iy_j \in R$. Si y grado $I_t(A) \geq 2(f-t) + 1$ para cada t , entonces*

$$H_*(\mathcal{K}_A) = \begin{cases} R_0 & \text{si } * = 2, 4, \dots, 2f \\ R/J_A & \text{si } * = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde R/J_A es el ideal generado por las derivadas parciales de A .

Ilustraremos el teorema y el algoritmo con un par de ejemplos:

1. Sea S un anillo noetheriano, $f \geq 1$, y consideremos f^2 indeterminadas independientes, Z_{ij} , $1 \leq i, j \leq f$. Denotemos por R_0 el anillo de polinomios $S[Z_{ij}]$. Sea $A = \sum_{ij} a_{ij} x_i y_j \in R_0[x_1, \dots, x_f, y_1, \dots, y_f]$, nuestra forma bilineal en R_0 , donde $a_{ij} = Z_{ij}$. Observemos que de esta forma la matriz (a_{ij}) es genérica sobre R_0 . En este caso tenemos

$$\text{grad } I_t(A) = (f - t + 1)^2 \geq 2(f - t) + 1.$$

Entonces se satisfacen las hipótesis del teorema anterior y podemos concluir que:

$$H_*(\mathcal{K}_A) = \begin{cases} R_0 & \text{si } * = 2, 4, \dots, 2f \\ R/J_A & \text{si } * = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2. Sean S un anillo noetheriano, $n \geq 3$ un entero impar y $R_0 = S[Z_{ij}]$, con $1 \leq i < j \leq n$, el anillo de polinomios en $\frac{1}{2}n(n-1)$ indeterminadas. Consideremos $A = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j$ la forma bilineal sobre R_0 , donde (a_{ij}) es la matriz genérica alternante:

$$a_{ji} = \begin{cases} Z_{ij} & \text{si } i < j \\ -Z_{ji} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Entonces $I_f(A) = 0$ y

$$\text{grad } I_t(A) = \text{grad } I_{t-1}(A) = \binom{f-t+2}{2}.$$

para cada entero par t , con $2 \leq t \leq f-1$.

A continuación con el uso del algoritmo, estudiaremos la homología $H_*(\mathcal{K}_A^j)$, donde j es un entero par y no negativo.

Si $j = 0$, entonces

$$\mathcal{K}_A^0 : \dots \rightarrow 0 \rightarrow R_0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Si $j = 2$, entonces el algoritmo resulta:

○ ○

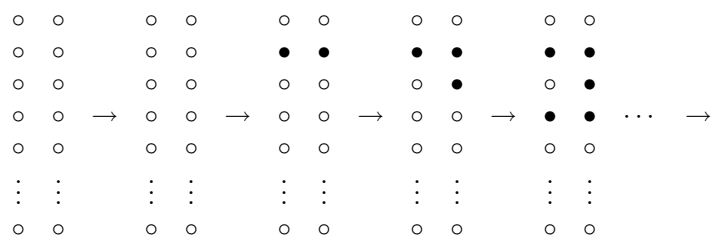
Podemos concluir entonces que $H_2(\mathcal{K}_A^2) \cong R_0$ y $H_*(\mathcal{K}_A^2) = 0$, a menos que $* = 0, 1, 2$.

Si $j = 4$, entonces el algoritmo resulta:

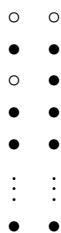


En este caso concluimos que $H_4(\mathcal{K}_A^4) \cong R_0$ y $H_*(\mathcal{K}_A^4) = 0$, a menos que $* = 0, 1, 4$.

Si $j \geq 6$, entonces los pasos sucesivos del algoritmo son:



y el resultado final es



de donde concluimos que $H_*(\mathcal{K}_A^j) = 0$, a menos que $* = 0, 1, 2$, o cuando $* = j$ y $j \leq 2f$, en cuyo caso $H_*(\mathcal{K}_A^j) \cong R_0$. El hecho de que hay una casilla no marcada en la tercera fila implica que $\text{Supp } H_2(\mathcal{K}_A^j) \subseteq \mathbf{V}(I_{f-2}(A))$, el cual es el lugar geométrico del subesquema cerrado de codimensión 3 definido por los Pfaffianos maximales de (a_{ij}) .

3 El Complejo $S_k(\phi.)$

Dedicamos esta sección al estudio de la homología del complejo $S_k(\phi)$ en términos de la aplicación ϕ , para $\phi : G \rightarrow F$ con G y F R -módulos libres con $n = \text{rang}(G) \leq \text{rang}(F) = m$. Los complejos $S_k(\phi)$ son objetos familiares en álgebra conmutativa y teoría de representaciones. Ellos juegan un papel central en el desarrollo de una teoría general de los complejos de Schur y el estudio de resoluciones libres finitas para ideales generados por los menores de una matriz, [1]. También hay un resultado muy conocido de Avramov, [2], en el cual se

establece la aciclicidad de estos complejos en términos de los ideales generados por menores. En el caso en el cual ϕ es una aplicación genérica, G. Boffi ha estudiado la homología de $S_k(\phi)$, y la de su dual, [3]. Recordemos que $S_k(\phi)$ es el complejo,

$$0 \longrightarrow \wedge^k G \longrightarrow \wedge^{k-1} G \otimes S_1 F \longrightarrow \dots \longrightarrow \wedge^j G \otimes S_{k-j} F \xrightarrow{d_j} \dots \longrightarrow S_k F \longrightarrow 0$$

donde el j -ésimo término es $\wedge^j G \otimes S_{k-j} F$, y la diferencial del complejo denotada por d_j es definida mediante la fórmula,

$$d_j(g_1 \wedge \dots \wedge g_j \otimes f_1^{\alpha_1} \dots f_1^{\alpha_t}) = \sum_{i=1}^j (-1)^{i-1} g_1 \wedge \dots \wedge \hat{g}_i \wedge \dots \wedge g_j \otimes \phi(g_i) f_1^{\alpha_1} \dots f_1^{\alpha_t}.$$

Consideremos ahora para un entero positivo k

$$R_1^k(\phi) = \begin{cases} 1, & \text{si } \text{grad } I_n(\phi) > 0, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

luego continuamos inductivamente

$$R_j^k(\phi) = \begin{cases} 1, & \text{si } \text{grad } I_{n-j+1}(\phi) > R_1^k(\phi) + \dots + R_{j-1}^k(\phi), \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

para $j = 2, \dots, k$. Obsérvese que si $n > k$, entonces $R_j^k(\phi) = 1$ para $n < j \leq k$.

Definición 9. La sucesión $(R_1^k(\phi), R_2^k(\phi), \dots, R_k^k(\phi))$ es la sucesión binaria asociada al par (ϕ, k) .

Proposición 10. Consideremos la sucesión binaria $(R_1^k(\phi), R_2^k(\phi), \dots, R_k^k(\phi))$ asociada al par (ϕ, k) . Sea $N = N_k(\phi)$ el número de ceros en esta sucesión. Denotemos por $j(i)$ el índice que corresponde al i -ésimo cero de la sucesión. Entonces,

1. $H_i(S_k \phi) = 0$ para $i > N$.
2. $\text{rad ann}(H_i(S_k \phi)) \supseteq \text{rad}(I_{n-j(i)+1}(\phi))$ para $1 \leq i \leq N$.

Es claro que esta proposición es un caso especial de la proposición 2, por ello omitimos su demostración.

Ahora necesitamos una serie de definiciones y lemas técnicos. Sea como antes, $(R_1^k(\phi), R_2^k(\phi), \dots, R_k^k(\phi))$ la sucesión binaria asociada al par (ϕ, k) .

Definición 11. La sucesión canónica asociada al par (ϕ, k) es la sucesión de enteros o negativos $(M_0^k \phi, M_1^k \phi, \dots, M_k^k \phi)$, donde $M_0^k \phi = 0$, y $M_j^k \phi = R_1^k(\phi) + \dots + R_j^k(\phi)$, para $j = 1, \dots, k$.

Esta sucesión canónica satisface una serie de propiedades elementales de fácil demostración las cuales recopilamos en el siguiente

Lema 12. *Sea $(M_0^k\phi, M_1^k\phi, \dots, M_k^k\phi)$ la sucesión canónica asociada al par (ϕ, k) , entonces:*

1. $0 \leq M_{j-1}^k\phi \leq M_j^k\phi$.
2. $\text{grad } I_{n-j+1}(\phi) \geq M_j^k\phi$.
3. Si $M_j^k\phi = M_{j-1}^k\phi$, entonces $\text{grad } I_{n-j+1}(\phi) = M_{j-1}^k\phi$.
4. Si $M_j^k\phi > 0$ para algún j y $M_i^k\phi = M_{i-1}^k\phi$, para algún $i > j$, entonces el ideal $I_{n-j+1}(\phi)$ contiene un **no divisor de cero** α tal que $\alpha R \neq R$.
5. $0 \leq M_j^k\phi - M_{j-1}^k\phi \leq 1$.
6. $M_j^k\phi_{\mathfrak{p}} \geq M_j^k\phi$, donde $\phi_{\mathfrak{p}}$ es la localización en el ideal primo \mathfrak{p} de R .
Sea $\alpha \in R$ y hagamos $\bar{\phi} = \phi \otimes 1 : G \otimes R/(\alpha) \longrightarrow F \otimes R/(\alpha)$. Entonces
7. Si R es un anillo local y α es un no divisor de cero tal que $\alpha R \neq R$, entonces $M_j^k\phi_{\geq} M_j^k\bar{\phi}$.
8. Si α es un no divisor de cero perteneciente a $I_j\phi$, entonces

$$\text{grad } I_j(\phi) = \text{grad } I_j(\bar{\phi}) + 1.$$

Estas fórmulas las aplicaremos libremente en lo que falta de esta sección. Definamos ahora la condición

(*) $M_i^k\phi > 0$ para algún i y $M_j^k\phi = M_{j-1}^k\phi$ para algún $j > j_0$, donde $j_0 = \min\{i : M_i^k\phi > 0\}$

Nótese que si la sucesión canónica $(M_0^k\phi, M_1^k\phi, \dots, M_k^k\phi)$ satisface (*), entonces el ideal I_{n-j_0+1} contiene un no divisor de cero α tal que $\alpha R \neq R$.

Lema 13. *Supongamos que la sucesión canónica $(M_0^k\phi, M_1^k\phi, \dots, M_k^k\phi)$ asociada al par (ϕ, k) satisface (*). Sea α un no divisor de cero en $I_{n-j_0+1}\phi$ tal que $\alpha R \neq R$. Sea $\bar{\phi} = \phi \otimes 1 : G \otimes R/(\alpha) \longrightarrow F \otimes R/(\alpha)$. Si R es un anillo local, entonces*

$$0 \leq M_j^k\phi - M_{j-1}^k\bar{\phi} \leq 1.$$

para cada $j = 1, \dots, k$.

Demostración. Para simplificar la notación escribamos $M_j = M_j^k\phi$ y $\bar{M}_j = M_j^k\bar{\phi}$, para cada $j = 1, \dots, k$. La demostración se hará por inducción sobre j . Si

$j < j_0$, entonces $M_j = 0$. Por el lema 12 tenemos que $\overline{M}_j = 0$. Por lo tanto la conclusión del lema vale si $j < j_0$. Supongamos por inducción que

$$0 \leq M_{j-1} - \overline{M}_{j-1} \leq 1,$$

para algún $j \geq j_0$. Necesitamos demostrar que

$$0 \leq M_j - \overline{M}_j \leq 1.$$

Supongamos entonces que $j \geq j_0$. La hipótesis de inducción implica que o bien tenemos que $M_{j-1} = \overline{M}_{j-1}$, o bien $M_{j-1} = \overline{M}_{j-1} + 1$. Trataremos cada caso por separado.

CASO 1: $M_{j-1} = \overline{M}_{j-1}$

Existen exactamente dos posibilidades. O bien $M_j = M_{j-1} + 1$ o $M_j = M_{j-1}$. Analicemos ambos casos por separado:

Supongamos primero que $M_j = M_{j-1} + 1$. Entonces

$$M_j - \overline{M}_j = M_{j-1} + 1 - \overline{M}_j = \overline{M}_{j-1} + 1 - \overline{M}_j = 1 - (\overline{M}_j - \overline{M}_{j-1}).$$

Pero $0 \leq \overline{M}_j - \overline{M}_{j-1} \leq 1$, por lo tanto se obtiene el resultado deseado.

Supongamos ahora que $M_j = M_{j-1}$. Como $j \geq j_0$, α es un no divisor de cero en $I_{n-j+1}\phi$. Aplicando el lema previo tenemos:

$$\begin{aligned} M_j - 1 &= \text{grad } I_{n-j+1}\phi - 1 \\ &= \text{grad } I_{n-j+1}\overline{\phi} \\ &\geq \overline{M}_j \\ &\geq \overline{M}_{j-1} \\ &= M_{j-1} \\ &= M_j \end{aligned}$$

CASO 2: $M_{j-1} = \overline{M}_{j-1} + 1$

De nuevo eberemos considerar los dos subcasos anteriores, o $M_j = M_{j-1}$, o bien $M_j = M_{j-1} + 1$.

Si $M_j = M_{j-1}$, entonces

$$\begin{aligned} M_j - \overline{M}_j &= M_{j-1} - \overline{M}_j \\ &= \overline{M}_{j-1} + 1 - \overline{M}_j, \\ &= 1 - (\overline{M}_j - \overline{M}_{j-1}) \end{aligned}$$

Pero $0 \leq \overline{M}_j - \overline{M}_{j-1} \leq 1$, por lo tanto se obtiene el resultado deseado.

Para finalizar queda analizar qué sucede cuando $M_j = M_{j-1} + 1$.

Demostremos primero que

$$\overline{M}_j - \overline{M}_{j-1} = 1.$$

En efecto, la otra posibilidad es

$$\overline{M}_j - \overline{M}_{j-1} = 0.$$

En cuyo caso se obtiene que

$$\text{grad } I_{n-j+1}\overline{\phi} = \overline{M}_{j-1}.$$

Pero como α es un no divisor de cero en $I_{n-j+1}\phi$. Aplicando el lema previo tenemos:

$$\begin{aligned} \text{grad } I_{n-j+1}\phi &= \text{grad } I_{n-j+1}\overline{\phi} + 1 \\ &= \overline{M}_{j-1} + 1 \\ &= \overline{M}_{j-1} \\ &= M_j - 1 \\ &< M_j, \end{aligned}$$

lo cual produce una contradicción y tenemos que

$$\overline{M}_j - \overline{M}_{j-1} = 1.$$

Pero también es cierto que

$$M_j - M_{j-1} = 1.$$

y entonces restando la primera igualdad menos la segunda obtenemos

$$M_j - \overline{M}_j = M_{j-1} - \overline{M}_{j-1} = 0$$

y ahora la demostración está completa \square

Con las mismas notaciones del lema anterior tenemos

Lema 14. *Supongamos que la sucesión canónica $(M_0^k\phi, M_1^k\phi, \dots, M_k^k\phi)$ asociada al par (ϕ, k) satisface (*). Sea α un no divisor de cero en $I_{n-j_0+1}\phi$ tal que $\alpha R \neq R$. Sea $\overline{\phi} = \phi \otimes 1 : G \otimes R/(\alpha) \rightarrow F \otimes R/(\alpha)$. Si R es un anillo local, entonces*

$$1. M_j^k(\overline{\phi}) = M_{j-1}^k(\overline{\phi}).$$

$$2. M_t^k(\phi) = M_t^k(\overline{\phi}) + 1.$$

para todo $t \geq \min(k, n)$.

Demostración. De nuevo simplificamos la notación como lo hicimos en el lema anterior y demostremos para comenzar que

$$M_{j-1} = \overline{M}_{j-1} + 1.$$

Por el lema anterior la otra posibilidad es que

$$M_{j-1} = \overline{M}_{j-1}.$$

Pero entonces la condición $M_j = M_{j-1}$ implica

$$\text{grad } I_{n-j+1}\phi = M_{j-1} = \overline{M}_{j-1} \leq \overline{M}_j.$$

Pero por otro lado como α es un no divisor de cero en $I_{n-j+1}\phi$, tenemos

$$\text{grad } I_{n-j+1}\phi = \text{grad } I_{n-j+1}\overline{\phi} + 1 \geq \overline{M}_j + 1,$$

lo cual es una contradicción.

Para demostrar la parte 1 del lema basta observar que la única otra posibilidad es

$$\overline{M}_j = \overline{M}_{j-1} + 1.$$

En cuyo caso $M_{j-1} = \overline{M}_{j-1} + 1$ implica que

$$\text{grad } I_{n-j+1}\overline{\phi} + 1 \geq \overline{M}_j = \overline{M}_{j-1} + 1 = M_{j-1}.$$

Por otra parte como $M_j = M_{j-1}$,

$$\text{grad } I_{n-j+1}\phi = M_{j-1}.$$

Por lo tanto,

$$\text{grad } I_{n-j+1}\overline{\phi} \geq M_{j-1} = \text{grad } I_{n-j+1}\phi.$$

como α es un no divisor de cero en $I_{n-j+1}\phi$, tenemos una contradicción con el lema 12(8).

Demostremos ahora (2). Sea $t' = \max\{i : M_i = M_{i-1}\}$. Claramente $t' \leq \min(k, n)$. Por lo tanto es suficiente demostrar la proposición para $t \geq t'$. Procederemos por inducción comenzando con $t = t'$. Es claro que $t' \geq j_0$. Aplicando la primera parte del lema y la igualdad $M_{j-1} = \overline{M}_{j-1} + 1$, pero con t' en lugar de j , obtenemos que

$$M_{t'} = M_{t'-1} = \overline{M}_{t'-1} + 1 = \overline{M}_{t'} + 1.$$

Hemos demostrado entonces (2) para $t = t'$. Supongamos por inducción que

$$M_t = \overline{M}_t + 1,$$

entonces necesitamos demostrar que

$$M_{t+1} = \overline{M}_{t+1} + 1.$$

La maximalidad de t' , junto a la hipótesis de inducción nos dice que

$$M_{t+1} = M_t + 1 = \overline{M}_t + 2.$$

Tenemos entonces solo dos posibilidades que analizar: $\overline{M}_t = \overline{M}_{t+1}$, o $\overline{M}_t = \overline{M}_{t+1} - 1$. Si $\overline{M}_t = \overline{M}_{t+1}$, entonces la igualdad $M_{t+1} = M_t + 1 = \overline{M}_t + 2$, implica $M_{t+1} = \overline{M}_{t+1} + 2$, lo cual contradice al lema anterior. Por otra parte, si $\overline{M}_t = \overline{M}_{t+1} - 1$, entonces de nuevo por la igualdad $M_{t+1} = M_t + 1 = \overline{M}_t + 2$, obtenemos que

$$M_{t+1} = \overline{M}_{t+1} + 1$$

y la demostración está completa \square

Solo nos resta demostrar otro lema técnico y podremos establecer nuestros resultados sobre la homología de $S_k\phi$.

Lema 15. *Sea $\phi : G \rightarrow F$ un homomorfismo de R -módulos finitamente generados. Supongamos que $\text{rang } G \leq \text{rang } F$. Sea k un entero positivo. Sea $(M_0^k\phi, M_1^k\phi, \dots, M_k^k\phi)$ la sucesión canónica asociada al par (ϕ, k) . Si $M_t^k\phi = 0$, para algún $t \geq 1$, y*

$$M_t^k\phi < M_{t+1}^k\phi < \dots < M_k^k\phi,$$

entonces

$$H_t(S_k\phi) \neq 0.$$

Demostración. Sea $n = \text{rang } G$ y $m = \text{rang } F$. Por simplicidad hagamos de nuevo $M_j = M_j^k\phi$. Debemos proceder por casos.

CASO 1 : $t = \min(k, n)$. Supongamos que $H_t(S_k\phi) = 0$. Como $t = \min(k, n)$, la sucesión

$$0 \rightarrow \Lambda^t G \otimes S_{k-t}F \xrightarrow{d_t} \Lambda^{t-1} G \otimes S_{k-t+1}F \rightarrow$$

es exacta. Denotemos ahora $I(d_t) = I_r(d_t)$, donde $r = \text{rang}(d_t)$. Como $M_t = 0$ tenemos

$$M_0 = M_1 = \dots = M_t = 0.$$

en consecuencia,

$$\text{grad } I_n\phi = \text{grad } I_{n-1}\phi = \dots = \text{grad } I_{n-t+1}\phi = 0.$$

Ahora tenemos exactamente dos posibilidades. $t = k$ o $t = n$. Si $t = k$, entonces poniendo $t = k$ en la sucesión exacta anterior y dualizando, obtenemos la sucesión exacta

$$\Lambda^{k-1} G^* \otimes F^* \xrightarrow{d_k^*} \Lambda^k G^* \rightarrow \Lambda^k \text{coker}(\phi^*) \rightarrow 0.$$

Como $\text{rang}(\Lambda^k G^*) = \binom{n}{k}$,

$$\begin{aligned} \text{rad}(I_{\binom{n}{k}} d_k) &= \text{rad}(I_{\binom{n}{k}} d_k^*) = \text{rad } \text{ann}(\Lambda^k \text{coker}(\phi^*)) = \\ &= \text{rad}(I_{n-k+1}\phi^*) = \text{rad}(I_{n-k+1}\phi). \end{aligned}$$

([2], Lema 2). Por lo tanto $\text{grad}(I_{\binom{n}{k}} d_k) = 0$. Como d_k es inyectiva, $\text{rang } d_k = \binom{n}{k}$. Por lo tanto $\text{grad } I(d_k) = 0$, y de acuerdo al criterio de exactitud de Buchsbaum-Eisenbud, la sucesión considerada al principio no es exacta, lo cual es una contradicción.

Ahora supongamos que $t = n$. De la definición de d_n , se deduce que $I_1(d_n) = I_1(\phi)$. Como $\text{grad } I_1(\phi) = 0$, tenemos que $\text{grad } I_j(d_n) = 0$ para $j \geq 1$. Por lo tanto si $\text{rang } d_n > 0$, entonces $\text{grad } I(d_n) = 0$, y se contradice la exactitud de la sucesión considerada. Si por otra parte $\text{rang } d_n = 0$, entonces $\text{rang } (\bigwedge^n G \otimes S_{k-n} F) = 0$, lo cual implica que $k < n$, y se contradice la minimalidad de n .

CASO 2: $1 \leq t < \min(k, n)$. Como $M_t = M_{t-1} = 0$, entonces

$$\text{grad } I_{n-t+1}(\phi) = 0.$$

Esto quiere decir que cada elemento no nulo en $I_{n-t+1}(\phi)$, es un divisor de cero. Un argumento clásico de evasión de ideales primos, nos da un ideal primo \mathfrak{p} tal que $\mathfrak{p} \supset I_{n-t+1}(\phi)$, con

$$\text{grad}(\mathfrak{p}) = \text{grad}(I_{n-t+1}(\phi)) = 0.$$

En este caso,

$$\text{grad}(I_{n-t+1}(\phi_{\mathfrak{p}})) = \text{grad}(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}) = 0,$$

donde $\phi_{\mathfrak{p}}$ es la localización de ϕ en \mathfrak{p} . Como $\text{grad}(I_{n-t}(\phi)) \geq M_{t+1} > 0$, entonces \mathfrak{p} no contiene a $I_{n-t}(\phi)$. En consecuencia $\phi_{\mathfrak{p}}$ se descompone dando lugar al isomorfismo

$$\phi_{\mathfrak{p}} \approx \phi' + 1,$$

donde $\phi' : G' \rightarrow F'$ es un isomorfismo de $R_{\mathfrak{p}}$ -módulos libres finitamente generados con

$$t = \text{rang } G' \leq \text{rang } F' = m - n + t.$$

Claramente,

$$I_j(\phi_{\mathfrak{p}}) = I_{j-n+t}(\phi'),$$

para todo j . Como $\text{grad}(I_{n-t+1}(\phi_{\mathfrak{p}})) = 0$, entonces $\text{grad}(I_1(\phi')) = 0$. En consecuencia

$$M_0^k \phi' = M_1^k \phi' = \dots = M_t^k \phi',$$

y

$$M_k^k \phi' > M_{k-1}^k \phi' > \dots > M_t^k \phi'.$$

Como $t < \min(k, n)$, entonces $\min(k, t) = t$. Aplicando el CASO 1 a ϕ' obtenemos, $H_t(S_k \phi') \neq 0$. Por lo tanto,

$$H_t(S_k \phi_{\mathfrak{p}}) \cong H_t(S_k \phi') \neq 0.$$

Como la formación de potencias simétricas conmuta con el cambio de anillos, tenemos $H_t(S_k\phi) \neq 0$ lo cual es una contradicción y completa la demostración del lema \square

Teorema 16. *Sea $\phi : G \rightarrow F$ un homomorfismo de R -módulos libres finitamente generados, con $\text{grad } G \leq \text{grad } F$. Sea k un entero positivo y $S_k\phi$ la k -ésima potencia simétrica de ϕ . Sea $N = N_k(\phi)$ el número de ceros que ocurren en la sucesión binaria $(R_1^k\phi, \dots, R_k^k\phi)$. Si $N > 0$, entonces*

$$H_N(S_k\phi) \neq 0.$$

Nota. A la luz de la *proposición 10*, $H_i(S_k\phi) = 0$, para $i > N$.

Demostración. Sea $n = \text{rang } G$. Denotemos por $M_j = M_j^k\phi$ a los términos de la sucesión canónica asociada a (ϕ, k) . Supongamos primero que R es un anillo local. Sea $m_\phi = M_{\min(k,n)}$. Ahora procederemos por inducción sobre m_ϕ , comenzando con $m_\phi = 0$. Sea $t = \min(k, n)$, entonces $M_t = 0$ y

$$M_t < M_{t+1} < \dots < M_k.$$

Por lo tanto, $N = N_k(\phi) = t$ y por el lema 15, tenemos que

$$H_N(S_k\phi) \neq 0.$$

Supongamos que $m_\phi > 0$, y que la proposición es cierta para homomorfismos ψ , con $m_\psi < m_\phi$. Sea

$$j_0 = \min\{i : M_i > 0\}.$$

Entonces existen exactamente dos posibilidades a considerar. $M_j = M_{j-1}$, para algún $j > j_0$ o $M_{j_0} < M_{j_0+1} < \dots < M_k$.

CASO 1. Supongamos que $M_{j_0} < M_{j_0+1} < \dots < M_k$. Si $j_0 = 1$, entonces claramente

$$R_1^k\phi = \dots = R_k^k\phi = 1,$$

y en consecuencia $N = 0$. Por lo tanto supongamos que $j_0 \geq 2$. Las condiciones

$$M_{j_0} < M_{j_0+1} < \dots < M_k$$

y

$$M_{j_0-1} = 0,$$

implican $N = j_0 - 1$. Aplicando entonces el lema anterior con $t = j_0 - 1$, nos da

$$H_N(S_k\phi) \neq 0,$$

como queríamos.

CASO 2. Supongamos ahora que $M_j = M_{j-1}$, para algún $j > j_0$. Hagamos $j' = \max\{j : M_j = M_{j-1}\} = \max\{j : R_j^k\phi = 0\}$, por lo tanto de acuerdo a

la Proposición 10 tenemos que $j' = j(N)$. Entonces por las propiedades de la sucesión canónica (M_0, M_1, \dots, M_k) , existe un no divisor de cero α en $I_{n-j_0+1}\phi$ tal que $\alpha R \neq R$. Como $j' > j_0$, entonces, de nuevo por la Proposición 10,

$$I_{n-j_0+1}\phi \subseteq \text{rad}(I_{n-j'+1}\phi) \subseteq \text{rad ann}(H_N(S_k\phi)).$$

Para algún p suficientemente grande, $\beta = \alpha^p \in \text{ann}(H_N(S_k\phi))$. Como β es un no divisor de cero en R , la multiplicación por β determina la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\beta} R \longrightarrow R/(\beta) \longrightarrow 0.$$

Como la formación de potencias simétricas conmuta con el cambio de anillos, al tensorizar la sucesión anterior con $S_k\phi$ obtenemos la sucesión exacta de complejos

$$0 \longrightarrow S_k\phi \xrightarrow{\beta} S_k\phi \longrightarrow S_k(\bar{\phi}) \longrightarrow 0,$$

donde $\bar{\phi} = \phi \otimes 1 : G \otimes R/(\beta) \longrightarrow F \otimes R/(\beta)$. Esta sucesión de complejos nos da las sucesiones exacta en homología

$$H_{N+1}(S_k\phi) \longrightarrow H_{N+1}(S_k\bar{\phi}) \xrightarrow{\delta} H_N(S_k\phi) \longrightarrow H_N(S_k\phi).$$

Por la Proposición 10, $H_{N+1}(S_k\phi) = 0$, por lo tanto δ es inyectiva y tenemos el isomorfismo

$$H_{N+1}(S_k\bar{\phi}) \cong H_N(S_k\phi). \quad (1)$$

Sea $N' = N_k(\bar{\phi})$. Aplicando el Lema 14(2) con $t = k$, tenemos,

$$N' = k - M_k^k \bar{\phi} = k - M_k + 1 = N + 1 > 0 \quad (2)$$

Aplicando ahora el Lema 14(2) con $t = \min(k, n)$ tenemos,

$$m_{\bar{\phi}} = m_{\phi} - 1 < m_{\phi}.$$

Ahora la hipótesis de inducción aplicada a $\bar{\phi}$, da

$$H_{N'}(S_k\bar{\phi}) \neq 0.$$

La conclusión, en el caso local, sigue ahora de (1) y (2). Consideremos ahora el caso general, es decir R un anillo noetheriano, y sea j el índice correspondiente al N -ésimo cero de la sucesión binaria $(R_1^k\phi, \dots, R_k^k\phi)$. Entonces,

$$M_j^k = M_{j-1}^k \stackrel{def}{=} d,$$

y

$$\text{grad } I_{n-j+1}\phi = d.$$

De nuevo un argumento de evasión de ideales primos, nos da un ideal primo \mathfrak{p} que contiene a $I_{n-j+1}\phi$, con

$$\text{grade } \mathfrak{p} = \text{grad } I_{n-j+1}\phi = d.$$

En este caso

$$\text{grade } \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} = \text{grad } I_{n-j+1}(\phi_{\mathfrak{p}}) = d.$$

Por lo tanto,

$$M_j^k\phi = d\text{grad } I_{n-j+1}(\phi_{\mathfrak{p}}) \geq M_j^k(\phi_{\mathfrak{p}}).$$

Por otra parte,

$$M_j^k(\phi_{\mathfrak{p}}) \geq M_j^k\phi.$$

Luego,

$$M_j^k\phi = M_j^k(\phi_{\mathfrak{p}}).$$

Como

$$M_k^k\phi > \cdots > M_j^k\phi,$$

por el Lema 12(5)(6), tenemos

$$M_k^k(\phi_{\mathfrak{p}}) > \cdots > M_j^k(\phi_{\mathfrak{p}}).$$

Por lo tanto,

$$N_k(\phi_{\mathfrak{p}}) = N_k(\phi) = N,$$

y en consecuencia

$$H_N(S_k(\phi_{\mathfrak{p}})) \neq 0.$$

Como la formación de potencias simétricas conmuta con el cambio de anillos tenemos que

$$H_N(S_k\phi) \neq 0$$

y la demostración está completa \square

Finalizamos nuestro análisis con el

Teorema 17. *Sea $\phi : G \longrightarrow F$ un homomorfismo de R -módulos libres finitamente generados, con $\text{grad } G \leq \text{grad } F$. Sea k un entero positivo y $S_k\phi$ la k -ésima potencia simétrica de ϕ . Sea $N = N_k(\phi)$ el número de ceros que ocurren en la sucesión binaria $(R_1^k\phi, \dots, R_k^k\phi)$. Hagamos $j(i)$ igual al índice correspondiente al i -ésimo cero en la sucesión $(R_1^k\phi, \dots, R_k^k\phi)$. Si $i = 1 \cdots, N$ y $R_{j(i)+1}^k\phi = \cdot$ entonces*

$$\text{grad } H_i(S_k\phi) = \text{grad } I_{n-j(i)+1}\phi.$$

Demostración. Sea $n = \text{rang } G$ y $j = j(i)$. Como $R_j^k \phi = 0$, tenemos

$$M_j^k \phi = M_{j-1}^k \phi \stackrel{\text{def}}{=} d,$$

y

$$\text{grad } I_{n-j+1} \phi = d.$$

Ahora usamos de nuevo el argumento clásico de evasión de ideales primos y obtenemos un ideal primo \mathfrak{p} que no contiene a $I_{n-j+1} \phi$ y tal que

$$\text{grade } \mathfrak{p} = \text{grad } I_{n-j+1} \phi = d.$$

En este caso

$$\text{grade } \mathfrak{p} R_{\mathfrak{p}} = \text{grad } I_{n-j+1}(\phi_{\mathfrak{p}}) = d.$$

Por lo tanto,

$$M_j^k \phi = d \text{grad } I_{n-j+1}(\phi_{\mathfrak{p}}) \geq M_j^k(\phi_{\mathfrak{p}}).$$

Por otra parte,

$$M_j^k(\phi_{\mathfrak{p}}) \geq M_j^k \phi.$$

Luego,

$$M_j^k \phi = M_j^k(\phi_{\mathfrak{p}}).$$

Como $R_{j+1}^k \phi = 1$, tenemos

$$\text{grad } I_{n-j}(\phi) \geq M_{j+1}^k \phi > M_j^k \phi = d = \text{grade } \mathfrak{p}.$$

En consecuencia $\mathfrak{p} \not\supseteq I_{n-j}(\phi)$ y por lo tanto,

$$I_1(\phi_{\mathfrak{p}}) = I_2(\phi_{\mathfrak{p}}) = \cdots = I_{n-j}(\phi_{\mathfrak{p}}) = R_{\mathfrak{p}},$$

y

$$R_{j+1}^k(\phi_{\mathfrak{p}}) = R_{j+2}^k(\phi_{\mathfrak{p}}) = \cdots = R_k^k(\phi_{\mathfrak{p}}) = 1.$$

De aquí sigue,

$$\begin{aligned} N_k(\phi_{\mathfrak{p}}) &= k - \sum_{t=1}^k R_t^k(\phi_{\mathfrak{p}}) \\ &= k - \left(\sum_{t=1}^j R_t^k(\phi_{\mathfrak{p}}) + \sum_{t=j+1}^k R_t^k(\phi_{\mathfrak{p}}) \right) \\ &= k - (M_j^k(\phi_{\mathfrak{p}}) + k - 1) \\ &= j - M_j^k(\phi_{\mathfrak{p}}) \\ &= j - M_j^k(\phi) \\ &= i. \end{aligned}$$

Ahora de acuerdo al teorema anterior, tenemos,

$$H_i(S_k(\phi_{\mathfrak{p}})) \neq 0.$$

Pero entonces, de acuerdo a la Proposición 10, obtenemos las inclusiones

$$\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \supseteq \text{rad ann } H_i(S_k(\phi_{\mathfrak{p}})) \supseteq \text{ann } I_{n-j+1}(\phi_{\mathfrak{p}}).$$

En particular se sigue que

$$\text{grad ann } H_i(S_k(\phi_{\mathfrak{p}})) = d$$

y de nuevo por un argumento de cambio de anillos tenemos,

$$\begin{aligned} d &= \text{grad ann } H_i(S_k(\phi_{\mathfrak{p}})) \\ &= \text{grad ann } H_i(S_k(\phi))_{\mathfrak{p}} \\ &\geq \text{grad ann } H_i(S_k(\phi)). \end{aligned}$$

Por otra parte la Proposición 10, implica

$$\text{grad ann } H_i(S_k(\phi)) \geq \text{grad } I_{n-j+1}(\phi) = d.$$

En consecuencia

$$\text{grad } H_i(S_k(\phi)) = \text{grad ann } H_i(S_k(\phi)) = d = \text{grad } I_{n-j+1}(\phi),$$

como queríamos y se completa así la demostración del teorema. \square

Referencias

- [1] K.Akin, D.A. Buchsbaum, J. Weyman. *Schur functors and Schur complexes*, Adv. in Math. 44 (1982), 207-278.
- [2] L. Avramov. *Complete intersections and symmetric algebras*, J. of Algebra. 73 (1981), 248-263.
- [3] G. Boffi. *Bilinear forms and (hyper)determinants*, Adv. in Math. 123 (1996), 91-103.
- [4] D. Buchsbaum, D. Eisenbud, . *What makes a complex exact?*, J. of Algebra. 25 (1973), 259-268.
- [5] W. Bruns, U. Vetter, *A remark on Koszul complexes*, Contributions to Algebra and Geometry. 39 (1998), N° 2, 249-254.
- [6] I.M. Gelfand, M.M. Kapranov, A.V. Zelevinsky, *Hyperdeterminants*, Adv. in Math. 96 (1992), 226-263.
- [7] I. Manji, R. Sánchez. *On the homology of the Schur complex*, J. of Algebra. 182 (1996), 274-286.

- [8] I. Manji, R. Sánchez. *A note on the homology of the Schur complex*, J. of Algebra. 211 (1999), 514-523.
- [9] J. Weyman. *Calculating discriminants by higher direct images*, Trans. Amer. Math. Soc. 343 (1994), 367-389.

RAFAEL SÁNCHEZ LAMONEDA
ESCUELA DE MATEMÁTICAS, FACULTAD DE CIENCIAS,
UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA,
CARACAS, VENEZUELA
`rsanchez@euler.ciens.ucv.ve`

IMTIAZ MANJI
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND STATISTICS,
CARLETON UNIVERSITY, 1125 COLONEL BY DRIVE,
OTTAWA, CANADA K1S5B6