

Obstáculos cilíndricos y convexos. Ver *Billares*, por *R. Markarian*

**Asociación Matemática Venezolana**  
Apartado 47.898, Caracas 1041 – A, Venezuela

**Boletín  
de la  
Asociación  
Matemática  
Venezolana**

**Vol. IX • No. 2 • Año 2002**

# Boletín de la Asociación Matemática Venezolana

Volumen IX, Número 2, Año 2002

I.S.S.N. 1315-4125

Editor

Argimiro Arratia

Comité Editorial

Oswaldo Araujo Eduardo Lima de Sá

Alejandra Cabaña Gerardo Mendoza Joaquín Ortega

El Boletín de la Asociación Matemática Venezolana se publica dos veces al año en forma impresa y en formato electrónico. Sus objetivos, información para los autores y direcciones postal y electrónica se encuentran en el interior de la contraportada. Desde el Volumen VI, Año 1999, el Boletín aparece reseñado en *Mathematical Reviews*, *MathScinet* y *Zentralblatt für Mathematik*.

## Asociación Matemática Venezolana

Presidente

Wilfredo Urbina

Capítulos Regionales

**CAPITAL**

*Wilfredo Urbina*, Matemáticas, UCV  
wurbina@euler.ciens.ucv.ve

**LOS ANDES**

*Oswaldo Araujo*, Matemáticas, ULA  
araujo@ciens.ula.ve

**ZULIA-FALCON**

*Fernando Sánchez*, Matemáticas, LUZ  
fsanchez@luz.ve

**CENTRO-OCCIDENTAL**

*Neptalí Romero*  
nromero@uicm.ucla.edu.ve  
Matemáticas, UCLA

**ORIENTE**

*Jacques Laforgue*  
laforgue@sucre.udo.edu.ve  
Matemáticas, UDO

La Asociación Matemática Venezolana fue legalmente fundada en 1990 como una organización civil cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de la matemática en Venezuela. Para más información ver su portal de internet o escribir a su dirección postal.

Asociación Matemática Venezolana

Apartado 47.898, Caracas 1041-A, Venezuela

amv@usb.ve <http://amv.ivic.ve/>

**Boletín de la Asociación Matemática Venezolana**  
**Volumen IX, Número 2, Año 2002**

<b>PRESENTACIÓN</b>	<b>107</b>
<b>ARTÍCULOS</b>	
<b>Billares. Modelos con Dinámicas Caóticas</b> Roberto Markarian	<b>109</b>
<b>Real and Complex Fundamental Solutions – A Way for Unifying Mathematical Analysis</b> Wolfgang Tutschke	<b>141</b>
<b>El Proceso de Wiener y el Teorema del Límite Central</b> E. M. Cabaña	<b>181</b>
<b>MATEMÁTICAS RECREATIVAS</b>	
<b>El Problema Bovinum de Arquímedes</b> Douglas Jiménez	<b>193</b>
<b>INFORMACIÓN NACIONAL</b>	
<b>XVI Jornadas Venezolanas de Matemáticas</b>	<b>201</b>
<b>XVI Escuela Venezolana de Matemáticas</b>	<b>203</b>
<b>INFORMACIÓN INTERNACIONAL</b>	
<b>La Esquina Olímpica</b> Rafael Sánchez Lamonedá	<b>211</b>
<b>Congreso Internacional de Matemáticos, 2002, y Asamblea General de la Unión Matemática Internacional</b> Eduardo Lima de Sá	<b>215</b>
<b>LIBROS</b>	
<i>The Honors Class: Hilbert's Problems and Their Solvers,</i> por Benjamin H. Yandell Reseñado por Argimiro Arratia	<b>221</b>
<b>AGRADECIMIENTOS</b>	<b>229</b>

## Presentación

En este Boletín ofrecemos al lector los artículos de Roberto Markarian, Wolfgang Tutschke y Enrique Cabaña. El primer autor nos explica las relaciones del modelo de los gases de Boltzmann y su Hipótesis Ergódica con la moderna Teoría Ergódica y, en particular, con la Teoría de Billares. El segundo autor expone en su extenso artículo, basado en un mini-curso que dio en la Universidad Simón Bolívar, un análogo al Teorema Fundamental del Cálculo para operadores diferenciales parciales. Finalmente, el tercer autor presenta una demostración del Teorema del Límite Central basada en el proceso de Wiener, y con similar técnica obtiene un TLC funcional y la convergencia en distribución del proceso empírico al puente browniano; este último artículo describe el contenido de una charla dada por Cabaña en la Universidad de Oriente, en Cumaná, en el marco de los Terceros Talleres de Formación Matemática.

Iniciamos con este Boletín una nueva sección: *Matemáticas Recreativas*, donde se manifestará el carácter entretenido, algunas veces mágico y siempre asombroso de la matemática, dirigida a todo público. Inaugura esta sección Douglas Jiménez, quien saca las cuentas implícitas en un poema de Arquímedes y obtiene resultados numéricos sorprendentes.

Las secciones habituales de nuestro Boletín están cargadas de información que no pueden dejar de leer, y cerramos con otra nueva y muy sencilla sección de *Agradecimientos*, donde agradecemos a todos aquellos de nuestros asociados, que en los dos números de este volumen IX, colaboraron con el trabajo de corrección y arbitraje de artículos y otros aspectos de edición del Boletín. Esta sección se repetirá en el último número de cada volumen y con ella cumpliremos el debido homenaje que se merecen aquellos que contribuyen con la elaboración de los números correspondientes del Boletín. Nuestros lectores que deseen servir como árbitros de los artículos que recibimos para consideración editorial, por favor enviar una nota via *email* al Editor ([arratia@ma.usb.ve](mailto:arratia@ma.usb.ve)) indicando sus áreas de interés en matemáticas.

A. A.

## Billares. Modelos con Dinámicas Caóticas

Roberto Markarian

### Resumen

Se exponen en forma sencilla las relaciones del modelo de los gases de Boltzmann y su Hipótesis Ergódica con la moderna Teoría Ergódica. Se da una descripción de la formulación matemática de la Teoría de Billares y sus consecuencias en el modelo de las bolas duras.

### 1 Introducción

En los cursos elementales de física nos han enseñado que un gas en un recipiente cerrado puede concebirse como muchísimas bolas pequeñas (moléculas) que se mueven y chocan entre sí. Si no hay intercambio de energía con el exterior esta situación puede modelarse como un sistema conservativo (hamiltoniano). Contrariamente a lo que uno esperaría de esta descripción tan elemental, el diagrama de fase, que incluye las posiciones y velocidades de todas las bolas, dista mucho de ser simple. Tanto el análisis teórico como las simulaciones computacionales cada vez más afinadas, detectan que los sistemas hamiltonianos típicos manifiestan una extraordinaria riqueza dinámica donde coexisten hiper-superficies (toros) invariantes (comportamientos integrables a los que se refiere la llamada teoría KAM) y una o varias regiones caóticas (no integrables).

Ante esta complejidad el físico y el matemático deben ser modestos y contentarse con el estudio de modelos simples en que sólo uno de los comportamientos sucede: o bien el espacio de fase está completamente laminado por toros invariantes o bien todo el espacio es “fácilmente” divisible en una cantidad finita de conjuntos invariantes de medida no nula (componentes ergódicas).

El modelo más simple de sistema hamiltoniano en que diversas manifestaciones de la no integrabilidad son demostrables lo constituye el **sistema de las bolas duras** (hard ball systems): una colección de bolas de billar sin rotación que interactúan elásticamente entre sí. Este sistema y algunos relacionados con él, constituyen modelos auténticamente físicos en que varias leyes de la mecánica estadística pueden ser probadas rigurosamente.

Como se verá en la Sección 7 de este trabajo el sistema de las bolas duras es isomorfo a un sistema de billar con una sola partícula evolucionando en un espacio de dimensión muy grande. Ella se mueve libremente (movimiento

uniforme, inercial) con choques elásticos (ángulo de entrada igual al de salida) contra obstáculos fijos. La Hipótesis Ergódica – formulada hace más de cien años por el físico alemán Ludwig Boltzmann – se relaciona directamente con estos modelos mecánicos para explicar las propiedades de los gases.

En la Sección 2 se dan algunas razones por las cuales es interesante el estudio de la dinámica de los billares. En la sección 3 serán analizados con más detalle los billares planos y se darán ejemplos sobre sus comportamientos. En las Secciones 4 a 7 se sigue la evolución cronológica que va de la formulación física a la formulación matemática de la Hipótesis de Boltzmann y se intenta mostrar cómo la formulación matemática de la Hipótesis se relaciona con el desarrollo de las áreas de la matemática conocidas en la actualidad por los nombres Teoría Ergódica, Transformaciones Continuas con Singularidades y, en particular, Teoría de Billares. En la Sección 4 se da la formulación física de la Hipótesis y en la 5 se presentan los elementos de su formulación matemática. En la Sección 7 se describen el modelo de los gases a través de los billares y otros modelos físicos relacionados con él. La dificultad en la presentación aumenta a partir de la Sección 7. En la última Sección resumimos y comentamos los principales resultados exactos recientes vinculados a la formulación matemática de la Hipótesis de Boltzmann.

## 2 La Belleza de los Billares

Comenzamos dando la definición de billares planos para así tener un objeto matemático al cual referirnos.

Todo fenómeno que evoluciona en el tiempo puede ser considerado como un **sistema dinámico**. Diremos que un tal sistema es determinístico si las reglas de evolución para el futuro (y/o para el pasado) son conocidas con precisión o sea, si conocido el estado del sistema en un momento inicial, se conoce el estado en cualquier tiempo futuro (y/o pasado). Un **billar plano** es el sistema dinámico que describe el movimiento de una partícula puntual en un conjunto compacto conexo  $\mathbf{Q} \subset \mathbb{R}^2$  (o en el toro  $\mathbb{T}^2$ ), cuya frontera es la unión de un número finito de curvas regulares, por ejemplo  $C^3$ . Dentro de  $\mathbf{Q}$  el movimiento es uniforme (velocidad constante) y la reflexión en la frontera  $\partial\mathbf{Q}$  es elástica (ángulo de salida igual al de entrada).

En la Figura 1 está representado el movimiento de una partícula en  $\mathbb{T}^2$  con un obstáculo circular: cuando la partícula llega al borde del cuadrado, podemos hacerla rebotar con choque elástico (como si fuese un billar cuadrado con obstáculo circular) o, como está hecho en la figura, la hacemos reaparecer en el lado opuesto. Esta última representación corresponde al movimiento en el toro donde el único obstáculo es el círculo.

Como el movimiento es uniforme dentro de  $\mathbf{Q}$ , el sistema del billar queda determinado por sus sucesivos choques con  $\partial\mathbf{Q}$  y, en lugar del flujo a tiempo

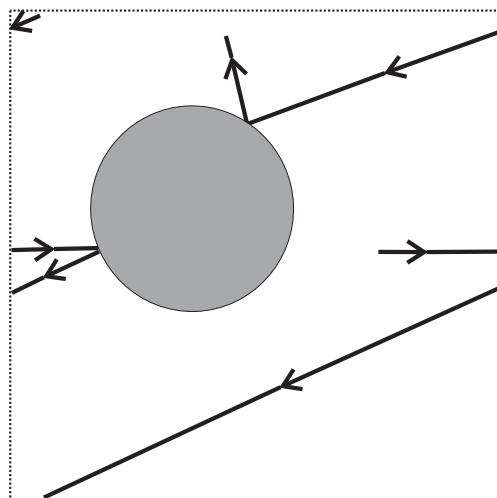


Figura 1: Billar en el toro.

continuo, podemos considerar la transformación que a cada punto de la frontera y a cada vector de salida le hace corresponder los del próximo choque (si estuviera bien definido). Así, a cada punto  $(q_0, v_0) \in \partial\mathbf{Q} \times \mathcal{S}_1$  corresponde un punto  $(q_1, v_1)$  en el mismo espacio producto (aquí,  $\mathcal{S}_1$  es media circunferencia  $[-\pi/2, \pi/2]$  de radio uno). Ver Figura 2.

Los arcos de frontera son llamados **dispersores** si son convexos vistos desde dentro de la mesa de billar (como la circunferencia de la figura 1), son llamados **focalizadores** si son cóncavos vistos desde dentro de la mesa (como una circunferencia vista desde dentro) y son llamados **neutros** si son segmentos de recta. Los llamamos dispersores y focalizadores porque un haz de trayectorias paralelas es “dispersado” o “focalizado”, respectivamente, al chocar con cada uno de ellos. Por favor tome un lápiz y papel y haga un dibujo con haces paralelos incidiendo sobre arcos de cada uno de esos tipos.

En general los billares son sistemas dinámicos que corresponden al movimiento uniforme de un punto material sobre una variedad riemanniana, con choque elástico en la frontera. Por tanto son flujos geodésicos en variedades con bordes. Las características específicas de los billares aparecen cuando el papel de la frontera (curvatura, posición relativa, etc.) es mucho más importante que el de la variedad subyacente.

En los últimos treinta años la Teoría de Billares se ha desarrollado principalmente debido a las siguientes razones:

1. Algunas clases de billares presentan un fuerte comportamiento caótico y



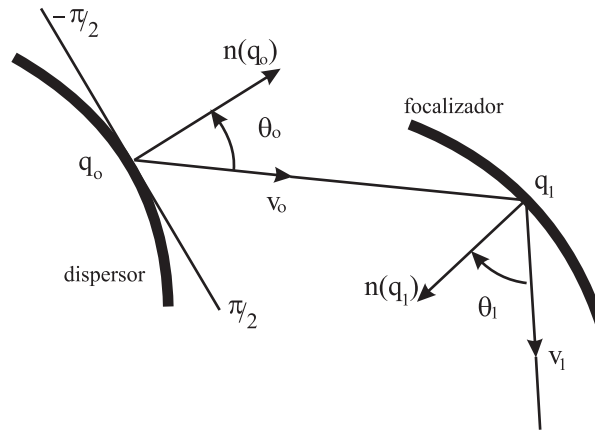


Figura 2: Espacio de configuración del billar. Si  $x_0 = (q_0, v_0)$ , entonces  $t(x_0) =$  distancia  $(q_0, q_1)$ .

- pueden ser considerados entre los mejores ejemplos de caos determinístico;
2. Muchos ejemplos interesantes de sistemas dinámicos de origen físico (especialmente aquellos en que la interacción entre partículas envuelve choques elásticos) pueden ser reducidos a billares. Algunos de estos ejemplos serán estudiados a partir de la Sección 4;
  3. Importantes problemas en la teoría de caos cuántico involucran un análisis profundo de los billares clásicos;
  4. El estudio de los billares sugiere muchos problemas bonitos e interesantes en geometría y probabilidad.

A continuación nos referiremos a algunos de estos problemas. Presentaremos los resultados para billares planos, aunque son válidos, con las debidas adaptaciones, para billares en cualquier dimensión.

Consideremos dos arcos de curvas dispersoras que se cruzan en un punto  $V$ , formando un vértice de la mesa de billar. Existen trayectorias que van directamente al vértice. Cualquier trayectoria que entra en el “ángulo” del vértice  $V$ , y no va directo hacia él, comenzará a salir en algún momento: el número de choques cerca del vértice es finito. Más aún, si las curvas dispersoras no son tangentes, el número de choques cerca del vértice tiene una cota superior finita. O sea, dado un número pequeño  $\varepsilon$ , existe un número  $C$  (que depende del ángulo entre ambas curvas, de sus curvaturas y de  $\varepsilon$ ) tal que toda trayectoria que pasa a una distancia menor que  $\varepsilon$  del vértice, acabará saliendo después de a lo máximo  $C$  choques. En la Sección 7 daremos una fórmula explícita para un caso particular de esta situación. Si las curvas son tangentes, en general existen

trayectorias que se mantienen próximas al vértice por la cantidad de choques que se desee. En este caso el número de choques es finito pero no hay una cota superior  $C$ .

Es también interesante calcular, para cualquier billar, la distancia media de las longitudes  $t$  de los segmentos de trayectoria entre dos choques. O sea, tomamos todos los posibles puntos de partida y, con algún criterio estadístico razonable, efectuamos la media de las longitudes hasta el próximo choque. El resultado de esta **trayectoria libre media** (mean free path), que será definida rigurosamente más adelante, es

$$\tau_m = \pi \frac{\text{área de la mesa de billar}}{\text{longitud del borde del billar}} .$$

### 3 Billares planos

Fijemos un origen en la frontera a partir del cual mediremos su longitud de arco; sean  $\partial\mathbf{Q}_i$  las componentes regulares de la frontera (que se cortan en los “vértices”, formando los “ángulos” del billar) y  $n(q)$  el versor normal interior a  $\partial\mathbf{Q}_i$  en  $q \in \partial\mathbf{Q}_i$ . Entonces, el **espacio de fase** donde está definido el sistema dinámico puede ser parametrizado por la longitud de arco  $s$  y por el ángulo  $\theta$  entre el versor  $v$  de salida y  $n(q)$ . Para simplificar la comprensión, supongamos inicialmente que la mesa no tiene obstáculos en su interior y que la longitud total de  $\partial\mathbf{Q}$  sea  $L$ . Entonces el espacio de fase estará contenido en un cilindro  $\mathcal{R}$  que se obtiene identificando de manera natural las posiciones  $s = 0$  con  $s = L$ . Es en este espacio que representaremos el movimiento de una partícula material chocando contra los bordes de la **mesa de billar**. Es claro que lo que se representa son los choques y que los **trozos de trayectorias** (segmentos entre un choque y otro) sólo serán visibles en el **espacio de configuraciones**, esto es, en la propia mesa del billar.

Sea  $S$  la **transformación del billar** tal que  $S(s_0, \theta_0) = (s_1, \theta_1)$ , donde  $s_0$  y  $s_1$  son las coordenadas de los puntos  $q_0$  y  $q_1$  de salida y llegada (respectivamente) en la frontera y  $\theta_0, \theta_1$  son los ángulos de salida de las trayectorias en  $q_0$  y  $q_1$  respectivamente. La función  $S$  (o su inversa) no está bien definida si  $q_1$  o  $q_0$  está en un vértice de la frontera y es discontinua en los puntos en que la trayectoria es tangente al borde. Obsérvese que la derivada de  $S$  no está acotada en estos puntos de tangencia.

En efecto, si  $\tilde{x}_1 = (\tilde{q}_1, \tilde{v}_1) = T(\tilde{x}_0)$  está definida para  $\tilde{x}_0 = (\tilde{q}_0, \tilde{v}_0)$  entonces para todo  $x_0 = (q_0, v_0)$  en un pequeño entorno de  $\tilde{x}_0$  la matriz derivada en las coordenadas  $(s, \theta)$  está dada por (ver [9], [2]):

$$DT(x_0) = - \left( \begin{array}{cc} \frac{t_0 K_0 + \cos \theta_0}{\cos \theta_1} & \frac{t_0}{\cos \theta_1} \\ K_1 \frac{t_0 K_0 + \cos \theta_0}{\cos \theta_1} + K_0 & \frac{K_1 t_0}{\cos \theta_1} + 1 \end{array} \right), \quad (1)$$

donde  $K_i = K(x_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$  son las curvaturas de  $\partial\mathbf{Q}$  en  $q_i$  y  $t_0$  es la distancia entre  $q_0$  y  $q_1$ , o sea la longitud del trozo de trayectoria entre  $x_0$  y  $x_1$ . En esta fórmula la curvatura de los arcos dispersores es positiva y la de los arcos focalizadores negativa. Obsérvese que los coeficientes de esta matriz tienden a infinito cuando la imagen de  $(q_0, v_0)$  por  $S$  tiende a ser tangente a  $\partial\mathbf{Q}$  (o sea, cuando  $\theta_1$  se aproxima a  $\pm\pi/2$ ).

Los segmentos verticales determinados por los vértices de la frontera, los puntos de tangencia y las imágenes y preimágenes por  $S$  de todos estos segmentos se denominan **singularidades** de  $S$  y las representamos por  $D$ .

Con esas restricciones la transformación  $S$  es diferenciable, con inversa diferenciable (difeomorfismo  $C^2$ ) en el conjunto  $M$  que se obtiene retirando  $D$  de  $\mathcal{R}$ .

Además, esa transformación preserva la medida  $d\mu = c \cos \theta ds d\theta$  ( $c = 1/(2L)$  es una constante de normalización). Esto significa que si  $\mu(A) = \int_A c \cos \theta ds d\theta$ , entonces  $\mu(A) = \mu(S^{-1}A)$  para todo conjunto boreliano  $A$ : la  $\mu$ -medida de los conjuntos borelianos del espacio de fase no varía cuando los "movemos" por  $S$ . Es con respecto a esta medida estándar que hacemos todas las medias y estudios probabilísticos de los billares. En particular, la trayectoria libre media, cuya definición fue dada al final de la Sección anterior, es calculada de la siguiente manera:  $\tau_m = \int_M t(x) d\mu(x)$  donde  $t(x)$  es la longitud de la trayectoria entre los puntos  $x = (s, \theta)$  y  $Sx$  (esto es, entre un choque y el siguiente).

Todas esas características de la transformación de billar en regiones acotadas, conexas, cuyos bordes están formados por un número finito de curvas  $C^3$  en el plano, son válidas también – con las debidas adaptaciones – para los billares en  $\mathbb{R}^d$  o en  $\mathbb{T}^d$ , el toro de dimensión  $d$  para cualquier  $d \geq 2$ .

Veamos algunos ejemplos de billares planos.

**Círculos.** Consideremos en primer lugar la mesa de billar cuyo borde es una circunferencia. Se sabe que para una partícula que sale con ángulo  $\theta_0$ , todos los choques ocurrirán con ese mismo ángulo y por tanto la representación de los puntos de esa trayectoria en el espacio de fase estará contenida en una recta horizontal. Los segmentos de trayectoria entre un choque y otro tendrán todos la misma longitud, y serán tangentes a una misma circunferencia. El lector interesado puede proponerse como ejercicio descubrir cuáles trayectorias son periódicas y cuándo una trayectoria cubre densamente un segmento de recta horizontal.

Veamos estos y otros problemas con un enfoque más formal. Sea  $\mathbf{Q}$  el disco de radio uno. La superficie  $M = \partial\mathbf{Q} \times [-\pi/2, \pi/2]$  (con coordenadas  $s, \theta$ ) es un cilindro cuya base es una circunferencia de longitud  $2\pi$  y altura  $\pi$ .

Para ver cómo actúa la transformación  $S : M \rightarrow M$ , sea  $x = (s, \theta) \in M$ . La siguiente reflexión ocurrirá en el punto  $Sx = (s + \pi - 2\theta, \theta)$ , y la  $n$ -ésima reflexión  $S^n x = (s + n(\pi - 2\theta), \theta)$ . En esta fórmula se supone que  $s$  es una

coordenada cíclica  $s$ , i.e.  $s + n(\pi - 2\theta)$  se toma módulo  $2\pi$ . Dos conclusiones surgen de inmediato.

(i) El ángulo de reflexión  $\theta$  es mantenido por  $S$ , i.e. toda curva  $\theta = \text{constante}$  en  $M$  es invariante por  $S$ . Cada una de esas curvas es un círculo paralelo a la base del cilindro  $M$ .

(ii) La transformación  $S$  restringida a cualquier curva  $\theta = \text{constante}$  la hace rotar por un ángulo constante,  $\pi - 2\theta$ . Por tanto,  $S$  actúa como una rotación en el círculo sobre cada curva invariante.

También observamos que la distancia entre dos choques  $t(x) = 2 \cos \theta$  es constante sobre cada círculo  $\theta = \text{constante}$ . Todos los trozos entre dos choques de una trayectoria que comienza con ángulo dado  $\theta$  son tangentes a un círculo de radio  $R = \sin \theta$  concéntrico con la mesa de billar. Ver Figura 3.

Si el ángulo de rotación  $\pi - 2\theta$  es un *múltiplo racional* de  $\pi$ , i.e. si  $\frac{\pi - 2\theta}{2\pi} = \frac{m}{n}$  con  $m, n \in \mathbb{Z}$ , entonces la transformación  $S$  sobre el círculo  $\theta = \text{constante}$  es periódica con período  $n$ . Más aún, cada punto sobre este círculo es periódico con el mismo período.

Si el ángulo de rotación  $\pi - 2\theta$  es *irracional*, i.e. si  $\theta/\pi$  es un número irracional, entonces la rotación en el círculo es ergódica y cada trayectoria es densa y uniformemente distribuida en el círculo. En ese caso los trozos de cualquier trayectoria en el espacio de configuraciones llenan densamente el anillo de la mesa de billar con radio interior  $R = \sin \theta$  (ver Figura 3).

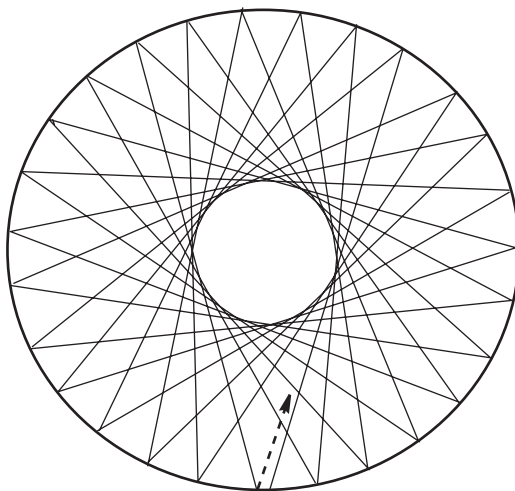


Figura 3: Trayectoria en el billar circular.

Se ve claramente en la Figura 3 que los trozos de trayectoria se ven más densos cerca del círculo interior. Si nuestra trayectoria de billar fueran pasajes de un rayo laser y el borde de la mesa de billar  $Q$  fuera un espejo perfecto, habría “mucho calor” allí, cerca del círculo interior. Por esta razón el círculo interior es llamado una **cáustica** (lo cual significa “que se quema”). En general, una cáustica para un billar es una curva tal que si un trozo de trayectoria es tangente a ella, entonces todo otro trozo de la misma trayectoria es tangente a la cáustica.

Dado que la superficie  $M$  está laminada por curvas invariantes  $\theta = \text{const}$ , la transformación  $S$  tiene conjuntos invariantes de medida no total (se dice que no es ergódica) porque cualquier conjunto que es unión de curvas  $S$ -invariantes es  $S$ -invariante. Otra manera de ver la no ergodicidad es encontrar una función invariante no constante. En este caso, la función  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $F(r, \theta) = \theta$  es una función suave no constante invariante por  $S$ , i.e. satisface  $F(Sx) = F(x)$  para todo  $x \in M$ .

**Definición.** Si un sistema dinámico suave  $S : M \rightarrow M$  sobre una variedad  $M$  admite una función suave no constante invariante por  $S$ , entonces  $F$  es llamada una **integral primera** y se dice que  $S$  es **integrable**.

Si  $S : M \rightarrow M$  es integrable, entonces toda curva de nivel  $S_c = \{F(x) = c\}$  es  $S$ -invariante, i.e.  $M$  puede ser foliada (laminada) por hipersuperficies invariantes. Si  $\dim M = d$  y  $S : M \rightarrow M$  admite  $d - 1$  integrales primera independientes  $F_1, \dots, F_{d-1}$ , entonces  $M$  puede ser foliada por subvariedades de dimensión uno  $S$ -invariantes  $\{F_1(x) = c_1, \dots, F_{d-1}(x) = c_{d-1}\}$ , donde  $c_1, \dots, c_{d-1} \in \mathbb{R}$ .

**Definición.** Si  $M$  puede ser foliada por subvariedades de dimensión uno (curvas)  $S$ -invariantes, entonces se dice que  $S$  es **completamente integrable**.

El billar en el círculo es completamente integrable. Su derivada y la de su potencia  $n$ -ésima para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , son

$$DS(x) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad DS^n(x) = \begin{pmatrix} 1 & -2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Esto sale de (1), con  $\theta_1 = \theta$ ,  $\tau = 2 \cos \theta$  y  $K = -1$ . En ningún sentido se puede decir que el billar en el círculo es caótico. En particular (ver Sección 8) las fórmulas anteriores permiten probar que ambos exponentes de Liapunov son cero en cualquier punto  $x \in M$  y, como consecuencia, que la entropía de  $S$  es nula.

Obsérvese, sin embargo, que vectores tangentes típicos crecen bajo la acción de  $DS^n$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , pero sólo linealmente en  $n$  (y no exponencialmente). Estas transformaciones, donde la separación de trayectorias cercanas son típicamente lineales, se dice que exhiben comportamiento **parabólico**, como contrapuesto al hiperbólico que será expuesto en la Sección 6.

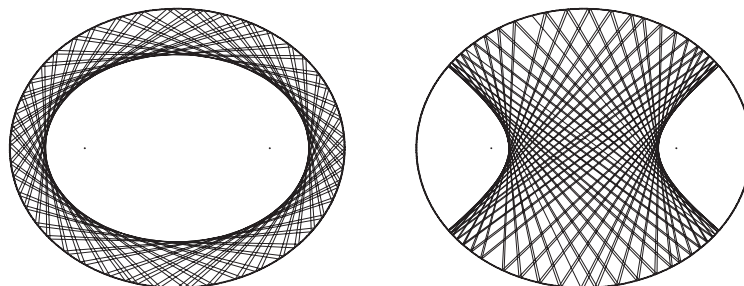


Figura 4: Cáusticas elípticas e hiperbólicas

**Elipses.** Si la mesa de billar tiene como borde una elipse de semieje vertical con longitud uno y semieje horizontal con longitud  $a > 1$ , la situación se complica un poco y habrá esencialmente dos tipos de trayectorias.

Si un trozo de trayectoria corta al eje menor entre un foco y el vértice más próximo, esta propiedad continuará verificándose para los otros trozos de trayectorias que cortan ese eje. Además, todos los trozos de trayectoria serán tangentes a una elipse interior con los mismos focos que la frontera. De acuerdo con la definición dada anteriormente esta elipse confocal es una cáustica del billar. Ver Figura 4. Obsérvese que si  $a = 1$  la elipse es una circunferencia y cada una de esas cáusticas también.

Si un trozo de trayectoria corta al eje menor entre los dos focos, todos los otros trozos también lo harán, y las rectas que contienen esos trozos son tangentes (en puntos dentro o fuera de la mesa elíptica) a una cáustica hiperbólica. Este tipo de cáusticas no se dan en la circunferencia.

Una pregunta surge naturalmente: ¿qué sucede con las trayectorias que pasan por los focos? La respuesta es aún más simple que en los casos anteriores: después de chocar con la elipse la partícula se dirigirá al otro foco y así sucesivamente. Estas trayectorias que pasan por los focos “separan” los comportamientos anteriores (con cáusticas elípticas e hiperbólicas) y son muy importantes en el estudio de la dinámica de este billar y de otros relacionados con él. Todos los resultados sobre cáusticas confocales y trayectorias que pasan por focos son consecuencias del llamado Teorema de Poncelet de la Geometría Proyectiva.

Hay dos órbitas periódicas distinguidas, una sobre el eje mayor y otra sobre el eje menor de la elipse.

El espacio de fase es el cilindro  $M$  con base la elipse y altura  $\pi$ . Si representamos algunas trayectorias de cada tipo en el espacio de fase veremos que las más parecidas con las de la circunferencia son las del primer tipo (cáusticas elípticas); en realidad éstas aparecen como deformaciones de las rectas invarian-

tes  $\theta = \text{const}$  del billar circular. Las trayectorias del segundo tipo están contenidas en curvas cerradas alrededor de dos puntos del espacio de fase que corresponden a las trayectorias periódicas que se mueven a lo largo del eje menor (vertical). Estas trayectorias llenan las dos regiones en  $M$  limitadas por la curva con la forma del símbolo  $\infty$  en la Figura 5. Las trayectorias que pasan por los dos focos están representadas sobre dos curvas (“separatrices” de los dos movimientos principales) que unen los dos puntos periódicos de las trayectorias que están sobre el eje mayor. Estas curvas cerradas **separatrices** en el cilindro  $M$  son las que forman el símbolo  $\infty$  en Figura 5.

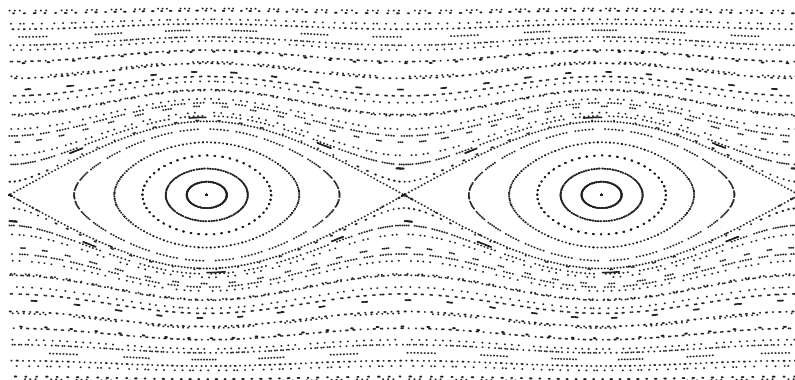


Figura 5: Espacio de fase  $M$  del billar elíptico

Por tanto, la superficie  $M$  está completamente foliada por curvas invariantes. En este sentido, el billar elíptico es similar al circular: ambos son completamente integrables.

Sobre cada curva invariante la transformación  $S$  (o  $S^2$ ) es conjugada a una rotación del círculo con algún ángulo (llamado el **número de rotación**). Este número cambia continua y monótonamente con la curva invariante. La curva especial con forma de símbolo  $\infty$  que separa las cáusticas hiperbólicas y elípticas, la separatriz, es invariante por  $S$ , pero no rota. Por el contrario, toda trayectoria comenzando en la separatriz converge (tanto en el futuro como en el pasado) a la órbita 2-periódica que está sobre el eje mayor.

La fórmula para la derivada de  $S$  en las coordenadas  $s, \theta$  es complicada y no nos dará mucha información a nuestros actuales efectos. Pero se pueden elegir unas coordenadas curvilíneas especiales en  $M$  (no válidas sobre la separatriz) con un eje a lo largo de las curvas invariantes, en que la matriz  $DS$  es triangular y tiene unos en la diagonal. Y podremos sacar las mismas conclusiones que sacamos de la fórmula (2): los exponentes de Liapunov y las entropías son nulas; para cualquier estándar la transformación  $S$  no es caótica.

El comportamiento dinámico de la transformación  $S$ , dejando de lado la separatriz y las órbitas periódicas distinguidas, es parabólico, como en el caso del billar circular. Pero ahora tenemos otras clases de fenómenos. La trayectoria periódica sobre el eje mayor atrae o repele a los puntos de la separatriz (se dice que la variedad estable o inestable de los puntos periódicos están sobre la separatriz, y que estos puntos son hiperbólicos (Sección 6). La otra órbita periódica distinguida, sobre el eje menor no es ni hiperbólica ni parabólica, es elíptica.

**Definición.** Sea  $x$  un punto periódico, i.e.  $S^n x = x$  para algún  $n \geq 1$ . Si la derivada  $DS^n(x)$  tiene un valor propio complejo (no real) en el círculo unidad, entonces se dice que el punto  $x$  es **elíptico**.

En este caso, cuando  $\dim M = 2$ , entonces la transformación derivada  $DS^n$  es una rotación con algún ángulo. Un entorno de  $x$  contiene frecuentemente muchas curvas cerradas  $S^n$ -invariantes (son curvas como elipses, de allí viene el nombre de *elíptico*). Estos hechos están relacionados con la teoría KAM mencionada anteriormente. Nuestra trayectoria periódica sobre el eje menor es elíptica y hay un gran entorno completamente foliado por óvalos invariantes por  $S^2$ . Por tanto, el billar dentro de una elipse tiene una combinación de estructuras parabólicas, hiperbólicas y elípticas.

**Estadios.** En el billar elíptico el espacio de fase no tiene singularidades “visibles”; no hay vértices del billar porque la frontera es una única curva regular, y las trayectorias tangentes no existen dentro del billar, porque están restringidas a los puntos  $\theta = \pm\pi/2$  del espacio de fase. Esto quiere decir que el conjunto  $D$  de las singularidades está formado por apenas dos segmentos y que el espacio  $M$  es un cilindro con altura  $\pi$  y sin los bordes superior e inferior.

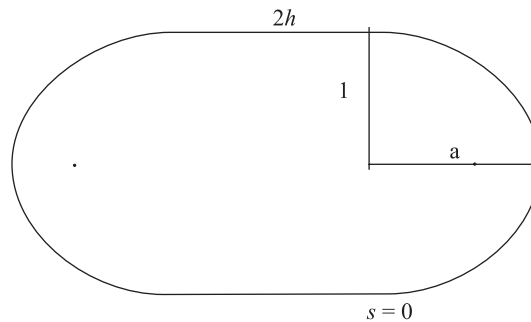


Figura 6: El estadio elíptico

Ahora modifiquemos un poco la situación cortando la elipse a lo largo del



eje menor, separando estas dos mitades y pegando las puntas libres con dos segmentos de longitud  $2h$ . Tendremos el *estadio elíptico* de la Figura 6. Si  $a = 1$  las curvas de los extremos son semicircunferencias y el estadio se llama de Bunimovich, por ser éste el nombre del primer matemático que lo estudió en detalle.

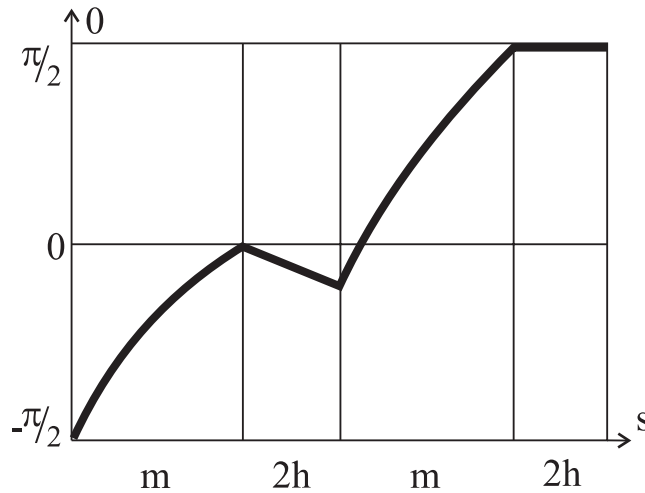


Figura 7: Espacio de fase del estadio elíptico. Se indican las curvas de los puntos cuyas imágenes están en el vértice inferior del eje menor de la semielipse de la derecha.

Nuevamente, las trayectorias tangentes no aparecen dentro del espacio de fase del billar. Pero ahora tenemos cuatro vértices en los puntos donde los extremos de las semielipses se tocan con los segmentos de recta. En esos puntos la frontera tiene derivada primera continua, pero su curvatura (que está directamente relacionada con la segunda derivada) es discontinua. Entonces, si la longitud de media elipse es  $m$ , la longitud total de la frontera es  $L = 2m + 4h$ , y si comenzamos a medir la longitud de arco a partir de uno de los (antiguos) vértices del semieje menor de la elipse, el espacio de fase será como en la Figura 7. En ella hemos representado también el conjunto de los puntos cuyas imágenes por  $S$  están en los puntos con  $s = 0$  (recuérdese que el ángulo  $\theta$  es medido a partir del vector de salida hacia la normal interior). El aspecto de cada curva varía de acuerdo con el valor  $a$  (longitud del semieje mayor). Aquí representamos el caso en que  $a$  es muy próximo a 1. El lector interesado puede intentar ver cómo esa curva se modifica cuando  $a$  aumenta.

Esa curva y las que son preimágenes o imágenes por  $S$  de los “vértices”  $s = m, m + 2h, 2m + 2h$  son obtenidas por diversas simetrías a partir de la

dibujada. Ellas forman parte del conjunto  $D$  de las singularidades. Entonces el conjunto  $M$ , que originalmente parecía ser un simple cilindro, quedó dividido en varias partes cuyos bordes son esas curvas. El estudio de cómo ellas se cortan y se distribuyen en el cilindro original es fundamental para entender el comportamiento estadístico de la dinámica de los billares.

En el caso del estadio elíptico las trayectorias son mucho más complicadas que en el caso de la elipse. Hay infinitas trayectorias con período dos entre los lados paralelos; hay trayectorias que pasan de una media elipse a la otra, cambiando el sentido de su circulación. El comportamiento general depende mucho de los valores de  $a$  y  $h$ . Esto será visto con un poco más de detalle en la sección 7. Por ejemplo, la representación de una simulación de 150.000 iteraciones de una única trayectoria del billar con  $a = 1.24, h = 1.04$  parece distribuirse casi uniformemente en el espacio de fase. En el trabajo [11] se estudian muchas propiedades del estadio elíptico.

## 4 La Hipótesis de Boltzmann

En 1964 Werner Heisenberg afirmó que “Un físico teórico se siente mejor si no hay objetos matemáticos rigurosamente definidos por detrás de sus consideraciones.”. Seguramente en ese momento tenía en mente los primeros años de la Mecánica Cuántica, pero esa frase puede igualmente ser aplicada a la obra de Ludwig Boltzmann. Y no sólo a su Hipótesis Ergódica, de la que trata la parte sustancial de lo que resta de este artículo, sino a otros temas estudiados por él.

Corresponde también recordar que, motivado por las ecuaciones de Boltzmann, David Hilbert incluyó en su célebre colección de 23 problemas (presentada en el Congreso Internacional de Matemática que tuvo lugar en París, en 1900) el denominado “Tratamiento Matemático de los Axiomas de la Física”. Sobre esto escribió: “es muy deseable que la discusión de los fundamentos de la Mecánica sea tomada también por los matemáticos. Así el trabajo de Boltzmann sobre los principios de la Mecánica sugiere el problema del desarrollo matemático de los procesos límite allí meramente indicados, que llevan de la visión atomística a las leyes del movimiento continuo”.

Entre 1870 y 1884 Boltzmann usó varias formas de la Hipótesis Ergódica.<sup>1</sup> Una formulación avanzada sería:

**Hipótesis Ergódica de Boltzmann.** *Para grandes sistemas de partículas interactuando en equilibrio, las medias temporales están próximas de las medias espaciales.*

Creo que viene al caso hacer algunos comentarios sobre esta formulación. Por “grandes sistemas de partículas interactuando en equilibrio” se entiende un

---

<sup>1</sup>La palabra ergódica, usada en este contexto, proviene del griego *ergon* (trabajo) y *odos* (camino, paso).

sistema con muchas partículas que no reciben influencias externas; por ejemplo, un número muy grande de partículas que chocan con las paredes completamente rígidas de una caja y entre sí, sin incidencia de otros factores. Las “medias temporales” son los promedios de los valores observados (mediciones) de una función numérica, al pasar el tiempo; éste se mide en alguna unidad que corresponda a la escala del problema. Si el modelo matemático del fenómeno es descrito por una ecuación diferencial, sus soluciones estarán dadas por un flujo y la evolución será a tiempo continuo; pero si el modelo está dado por una transformación (un mapa, una función) la evolución del tiempo no es continua, es discreta. En este artículo seguiremos trabajando con este último tipo de modelo porque el tiempo será medido por el número de veces que se aplica la transformación estudiada.  $S^n$  indicará la aplicación sucesiva de la transformación  $S$ ,  $n$  veces; por tanto aquí  $n$  es el “tiempo”. Entonces sumamos los valores medidos al transcurrir un largo tiempo  $T$ , y dividimos por  $T$  (que es un número entero:  $T \in \mathbb{Z}$ ). Las “medias espaciales” consisten de medias (integrales) de mediciones (o registros) simultáneos en todos los puntos con respecto a una medida con sentido físico en el espacio de fase. Las funciones medidas pueden ser, por ejemplo, la temperatura o la presión.

Observación: los físicos entienden las medias espaciales como promedio de equilibrio (microcanónico), o sea, con respecto a la medida de Liouville en la subvariedad del espacio de fase determinada por los invariantes triviales del movimiento. A esta medida nos referimos en el comentario anterior.

Introducidos esos conceptos matemáticos, podemos hacer una presentación más precisa de la Hipótesis Ergódica. Ella establece que si  $f$  es una medición – una función en el espacio de fase del sistema – y el tamaño del sistema – el número  $N$  de partículas – tiende a infinito, entonces

$$\frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} f(S^n x) \rightarrow \int_M f(x) d\mu(x) \quad (3)$$

donde  $\mu$  es una medida de equilibrio y  $S^n x$  es la evolución temporal del punto  $x$  en el espacio de fase.

Vemos inmediatamente que  $f$  y  $\mu$  también dependen de  $N$ , y por tanto una formulación matemática rigurosa debería especificar el significado de convergencia en (3). Vamos en busca de ese significado.

## 5 Encontrando un objeto y un problema matemáticos (de Boltzmann a Von Neumann: de 1870 a 1931)

Llevó mucho tiempo para que el objeto matemático de la Hipótesis Ergódica fuese encontrado. Sólo en 1929 Koopman comenzó a investigar grupos de transformaciones que preservan medidas, o sea, transformaciones que llevan conjuntos en otros que miden lo mismo. Esos progresos fueron precedidos por los éxitos

de la Teoría de la Medida, la cual, en otro sentido, permitiría a Kolmogorov en 1933 establecer los fundamentos axiomáticos de la Teoría de la Probabilidad.

Más precisamente, sea  $M$  un espacio abstracto, el espacio de fase del sistema, y  $\mu$  una medida de probabilidad sobre una  $\sigma$ -álgebra de  $M$ . La dinámica está dada por la aplicación sucesiva de una transformación  $S$  (o su inversa  $S^{-1}$ ), que preserva medida. Esto significa que para todo conjunto del  $\sigma$ -álgebra,  $A \subset M$ , y para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\mu(S^n A) = \mu(A)$ .

Finalmente, sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función (u observable) razonablemente regular, por ejemplo, perteneciente al espacio de las funciones de cuadrado integrable:  $\int f^2(x) d\mu(x) < \infty$ ; en este caso se dice que  $f \in L_2(\mu)$ .

De esa forma el objeto matemático  $(M, S, \mu)$ , con las funciones  $f$  – está definido.

En el mismo año (1929) Von Neumann probó el primer teorema ergódico, el cual establece que la media temporal de una función  $f$  a lo largo de una trayectoria que pasa por un punto  $x$  tiene límite  $\tilde{f}(x)$ :

**Teorema Ergódico.** Cuando  $T \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} f(S^n x) \rightarrow \tilde{f}(x), \quad \text{siendo la convergencia en el sentido } L_2(\mu).$$

En 1931 Birkhoff y Khincin separadamente probaron la misma fórmula, pero con convergencia para casi todo  $x$  en el sentido de la medida  $\mu$ , o sea, que esa convergencia se da para todos los puntos de  $M$  excepto los que están en un conjunto con  $\mu$ -medida nula. La función límite  $\tilde{f}(x)$ , que normalmente es llamada media de Birkhoff, es tal que su integral (sobre todo el espacio) tiene el mismo valor que la de  $f$ :  $\int_M \tilde{f}(x) d\mu(x) = \int_M f(x) d\mu(x)$ .

Dado que el término que depende de  $T$  es exactamente el promedio temporal que aparece en la Hipótesis de Boltzmann, esta pasó a tener un significado preciso inmediatamente después de formulado el Teorema Ergódico: en grandes sistemas de partículas interactuando en equilibrio, las medias temporales  $\tilde{f}(x)$  no dependen de  $x$ . Observe que, como  $\mu$  es una medida de probabilidad, si  $\tilde{f}(x)$  fuera constante, cuando integramos con respecto a  $\mu$  obtendremos el mismo valor  $\tilde{f}(x)$  y, por la observación final del párrafo anterior, resulta  $\tilde{f}(x) = \int_M \tilde{f}(x) d\mu(x) = \int_M f(x) d\mu(x)$ .

La propiedad de que en un sistema las medias de Birkhoff no dependen del punto inicial  $x$  fue considerada muy importante desde el comienzo, a tal punto que los sistemas  $(M, S, \mu)$  que verifican esta propiedad reciben el nombre de ergódicos.

**Definición: Ergodicidad.** El sistema  $(M, S, \mu)$  es ergódico si para toda función razonablemente regular  $f$ , por ejemplo, para toda  $f \in L_2$ , se satisface  $\tilde{f}(x)$  constante para  $\mu$ -casi todo punto  $x \in M$ .

Esta definición es equivalente a cada una de las siguientes tres afirmaciones:

# Si  $f$  es razonablemente regular y constante a lo largo de las órbitas ( $f \circ S^n = f$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ), entonces  $f$  es constante para  $\mu$ -casi todo punto  $x \in M$ .

# Si un conjunto  $A \subset M$  es invariante por  $S^n$  ( $S^n A = A$ ), entonces  $A$  es o bien casi todo el espacio  $M$  o tiene medida nula ( $\mu(A) = 0$  o  $1$ ).

#  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} \mu(S^{-n} A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$ , para todo par de conjuntos medibles  $A, B \subset M$ .

Resumiendo: tenemos un modelo matemático (grupo de transformaciones que preservan medidas) y la nueva noción de ergodicidad. Se plantea el problema de establecer si un sistema interesante desde el punto de vista físico es ergódico o no.

Estos progresos dieron origen a una nueva área de la Matemática, la **Teoría Ergódica**, y a varias subáreas. Una de ellas estudia generalizaciones de los teoremas ergódicos; otra, formas más fuertes de estocasticidad (mixing, sistemas de Bernoulli, decaimiento de correlaciones; ver, por ejemplo, [6], Cap. 2); una área especial – particularmente importante para este trabajo – estudia la ergodicidad de ciertos sistemas que aparecen en la Mecánica; otra, los problemas de isomorfismos y clasificación de los sistemas dinámicos, etc.

Los sistemas de partículas cuyos movimientos son descritos por la transformación  $S$  de la Sección 4 corresponden a una clase más general de los llamados **flujos hamiltonianos en variedades simplécticas**. Se creía que se podría aplicar la Hipótesis de Boltzmann a tales flujos. Pero existe un ejemplo célebre de Michel Herman que muestra la existencia de una cantidad muy grande de tales flujos que no son ergódicos (ver [7]). Ese ejemplo fue presentado al final de los años 80, pero ya anteriormente, las tentativas de prueba de la Hipótesis Ergódica se restringían a los modelos de bolas con choques elásticos.

## 6 Probando los primeros teoremas relevantes (de Von Neumann a Sinai de 1931 a 1970)

Los métodos para establecer la ergodicidad de sistemas mecánicos vinieron de otras áreas de la Matemática, en particular de la Teoría de Sistemas Dinámicos. En 1938-39 Hedlund y Hopf encontraron un método para demostrar la ergodicidad de flujos geodésicos en variedades compactas de curvatura negativa (se trata de movimientos inerciales sobre, por ejemplo, superficies que resultan de girar una hipérbola equilátera en torno de una asíntota). El principal descubrimiento fue el, así llamado, **comportamiento hiperbólico de los sistemas dinámicos**, que implicaba la ergodicidad de tales sistemas.

Hiperbolicidad significa la existencia de curvas transversales sobre las que el sistema dinámico actúa expandiendo (variedad inestable) o contrayendo (estable). Si la variedad no es una superficie, o sea, si tiene dimensión mayor

que dos, las curvas son subvariedades cuya suma de dimensiones es igual a la dimensión de la variedad original. Hiperbolicidad implica inestabilidad para todas las órbitas: trayectorias que comienzan arbitrariamente próximas unas de las otras se separan en el futuro o en el pasado: llamamos a esta última propiedad **sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales**.

El ejemplo mas simple de sistema hiperbólico es el famoso “cat” de Arnold (el nombre no proviene del gato que era usado para representarlo, sino de “Continuous Automorphisms of the Torus”). Consideramos la aplicación  $S_A$  del toro bidimensional  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  en si mismo, definida por la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Observamos que la transformación expande en una dirección y contrae en otra, siendo estas direcciones las correspondientes a los vectores propios con autovalores respectivamente  $\lambda_u > 1$  y  $\lambda_s < 1$  de la matriz  $A$ .

En 1942, poco después de los resultados fundamentales de Hedlund y Hopf, el físico ruso N. S. Krylov mostró que la inestabilidad observada en los flujos geodésicos también existían en los sistemas de bolas elásticas que modelan los gases. Este descubrimiento y el avance de las ideas de Hedlund y Hopf en la Teoría de Sistemas Dinámicos Hiperbólicos fueron la base para la versión de Sinai de la Hipótesis Ergódica de Boltzmann formulada en 1963 para el caso particular de bolas elásticas.

**Hipótesis Ergódica de Boltzmann-Sinai** [14]. El sistema de  $N$  bolas elásticas sobre  $\mathbb{T}^2$  o  $\mathbb{T}^3$  es ergódico para todo  $N \geq 2$ .

Como estos sistemas mecánicos tienen muchas cantidades que se conservan a lo largo de las órbitas, la interpretación que debemos dar a la conjetura es que tendremos hiperbolicidad en las (componentes conexas de las) subvariedades del espacio de fase definidas por los invariantes del movimiento. La primera diferencia conceptual que tiene esta conjetura comparada con la formulación original de Boltzmann es que aquí no se hace ninguna suposición sobre el número  $N$  de bolas. La ergodicidad (y otras propiedades estadísticas más fuertes) se verificaría para cualquier  $N \geq 2$ . De acuerdo con las ideas de los fundadores de la Mecánica Estadística el estado de un sistema de partículas es aleatorio porque cualquier sistema en la naturaleza contiene un número enorme de ellas: la aleatoriedad surge del gran número de grados de libertad. En el planteamiento de Sinai el número de partículas no tiene ninguna importancia: un sistema de dos partículas elásticas chocándose presenta comportamiento estocástico.

Una segunda característica importante del argumento de Sinai es que el conocimiento local de sistemas hiperbólicos lleva a una descripción global. La macrodinámica surge de la microdinámica.

En 1963 Sinai pensó haber probado el resultado. Escribió: “Entre los principales resultados de este artículo debería contarse el teorema de la ergodicidad de los sistemas de las bolitas (pellets) duras en una caja rectangular”. Pero sólo

en 1970 [15] pudo probar su conjetura para el caso  $N = 2$ : discos moviéndose en el toro  $\mathbb{T}^2$ .

Los intentos de probar la conjetura de Boltzmann-Sinai se extienden a lo largo de 40 años. A esta altura parece que el problema está casi resuelto. Ver última Sección.

## 7 El argumento de Sinai. Billares (1970)

Considérese el modelo de  $N$  discos moviéndose en el plano o  $N$  bolas moviéndose en el espacio. Estos dos modelos son muy similares, por lo que los discutiremos en paralelo. Por simplicidad, suponga que todos los discos (bolas) tienen el mismo radio  $r$  y la misma masa  $m$ . Cada bola (disco) se mueve libremente, i.e. con velocidad constante, hasta que choca con otra bola. Cuando dos bolas (discos) chocan, cambian sus velocidades de acuerdo con las leyes de los choques elásticos.

Estas leyes significan lo siguiente. Supongamos que dos bolas chocan. Llamemos  $q_1$  y  $q_2$  a sus centros y por  $v_1$  y  $v_2$  sus vectores velocidad en el momento de la colisión. Sea  $L$  la línea que une los centros  $q_1$  y  $q_2$ . Descomponemos

$$v_i = v_i^0 + v_i^\perp$$

para  $i = 1, 2$ , donde  $v_i^0$  es la componente del vector  $v_i$  paralelo a  $L$  y  $v_i^\perp$  es la componente perpendicular a  $L$ . Entonces las nuevas velocidades, salientes, de las bolas son

$$v_1^{\text{nue}} = v_1^\perp + v_2^0 \quad \text{y} \quad v_2^{\text{nue}} = v_2^\perp + v_1^0$$

En otras palabras, las bolas intercambian las componentes de la velocidad paralelas a la línea de los centros  $L$  y mantienen las componentes ortogonales. Observamos que las leyes de los choques elásticos implican la conservación de la energía cinética total  $\sum m\|v_i\|^2/2$  y el momento total  $\sum mv_i$  del sistema de las  $N$  bolas (discos). También observamos que la colisión de dos bolas duras con centros  $q_1$  y  $q_2$  sólo puede ocurrir si  $\text{dist}(q_1, q_2) = 2r$ , i.e.  $\|q_1 - q_2\|^2 = (2r)^2$ .

El sistema de las  $N$  bolas (discos) moviéndose en el espacio abierto (o en el plano) sin paredes no es muy interesante desde el punto de vista dinámico. Como es intuitivamente claro, el número total de choques entre pelotas es siempre finito, y después del último choque las pelotas se van para siempre libremente. Más aún, el número de choques entre las  $N$  pelotas en el espacio abierto está uniformemente acotado por una constante que sólo depende de  $N$ .<sup>2</sup>

Consideremos ahora  $N$  bolas o discos encerrados en un dominio acotado  $R$ , llamado el recipiente. Las bolas (discos) chocan elásticamente entre ellas y con las paredes del recipiente. Precisamente, si una bola con centro  $q$  choca una

<sup>2</sup>Esto último fue probado sólo recientemente:

**Teorema [1].** *El sistema de  $N$  bolas duras con masas y radios arbitrarios en el espacio*

pared en el punto  $w \in \partial R$ , entonces descomponemos el vector velocidad como  $v = v^0 + v^\perp$ , donde  $v^0$  es la componente paralela a la línea pasando a través de  $q$  y  $w$ , y  $v^\perp$  es perpendicular a esa línea. La nueva velocidad, saliente, es  $v^{\text{nue}} = v^\perp - v^0$ . Obsérvese que la energía cinética total del sistema es preservada, pero *no* su momento total.

**Modelo de Sinai de las bolas duras.** Ahora reducimos el sistema de  $N$  bolas duras a un billar. Supongamos que el recipiente  $R$  es un toro, por lo que no hay paredes (i.e.,  $\partial R = \emptyset$ ). Entonces las bolas sólo chocan entre ellas y también el momento total se conserva.

Más concretamente, el sistema está compuesto por  $N \geq 2$  bolas, cada una con masa unitaria y radio  $r > 0$ , moviéndose en  $\mathbb{T}^d$ , el toro  $d$ -dimensional ( $d \geq 2$ , siempre se puede suponer  $d = 2$  –discos– o  $d = 3$  –bolas). En el espacio de fase, la  $i$ -ésima bola es representada por  $(q_i, v_i) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$ , donde  $q_i = (q_i^1, q_i^2, \dots, q_i^d)$  indica la posición del centro de esta bola y  $v_i$  su velocidad.

El espacio de configuraciones  $\tilde{\mathbf{Q}}$  de las  $N$  bolas en  $\mathbb{T}^d$  es un subconjunto del toro de dimensión  $N \cdot d$  pues, dado que las bolas son macizas, sus centros deben estar a una distancia mayor o igual a dos veces sus radios, y por tanto debemos retirar de  $\mathbb{T}^{N \cdot d}$  los siguientes  $\binom{N}{2}$  obstáculos cilíndricos:

$$C_{i,j} = \left\{ Q = (q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{T}^{N \cdot d} : |q_i - q_j| < 2r \right\},$$

$1 \leq i < j \leq N$ . Como ya fue observado, la energía  $H = \frac{1}{2} \sum_1^N v_i^2$  y el momento total  $P = \sum_1^N v_i$  son integrales primeras del movimiento. Entonces, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $H = \frac{1}{2}$ ,  $P = 0$  y, también, que la suma de las componentes espaciales  $B = \sum_1^N q_i = 0$ . Estas condiciones son muy naturales desde el punto de vista físico; algunas están relacionadas con el estado de equilibrio en que estamos considerando el fenómeno. Para estos valores de  $H, P$  y  $B$ , el espacio de fase se reduce a  $M := \mathbf{Q} \times \mathcal{S}_{a-1}$  donde

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &:= \left\{ Q \in \tilde{\mathbf{Q}} : \sum_1^N q_i = 0 \right\} \\ &= \left\{ Q \in \mathbb{T}^{N \cdot d} \setminus \bigcup_{1 \leq i < j \leq N} C_{i,j} : \sum_1^N q_i = 0 \right\} \end{aligned}$$

abierto  $\mathbb{R}^d$  puede tener a lo sumo  $C < \infty$  choques.

$$C = \left( 32 \sqrt{\frac{m_{\max}}{m_{\min}} \frac{r_{\max}}{r_{\min}}} N^{\frac{3}{2}} \right)^{N^2}$$

donde  $m_{\max}$  y  $m_{\min}$  son las masas máximas y mínimas y  $r_{\max}$  y  $r_{\min}$  son los radios máximos y mínimos de las bolas, respectivamente.

Es destacable que este resultado admite una prueba geométrica relativamente elemental. Obsérvese que si los radios y masas son iguales  $C$  sólo depende de  $N$ .



Aquí  $a := \dim \mathbf{Q} = N \cdot d - d$  y  $\mathcal{S}_k$  denomina a la (media) esfera unitaria  $k$ -dimensional. La dimensión de  $\mathbf{Q}$  es  $N \cdot d - d$  porque la condición  $\sum q_i = 0$  impone  $d$  restricciones (una para cada coordenada) a los puntos de  $\mathbf{Q}$ . La dimensión del espacio de los vectores es  $N \cdot d - d$  porque  $\sum v_i = 0$  y tales vectores están en la esfera unitaria  $(N \cdot d - d - 1)$ -dimensional porque sus módulos (al cuadrado)  $\sum v_i^2$  son constantes. Es fácil ver que la dinámica de las  $N$  bolas, determinada por su movimiento uniforme con colisiones elásticas y el flujo del billar  $\{S^t : t \in \mathbb{R}\}$  sobre  $\mathbf{Q}$  con reflexiones en la frontera  $\partial\mathbf{Q}$  son isomorfos y conservan la medida de Liouville  $d\mu = \text{const} \cdot dq \cdot dv$  (para detalles ver [3], Cap. 6).

El conjunto  $D$  de las singularidades contiene todas las intersecciones de las superficies cilíndricas  $\partial C_{ij}$ . Estas intersecciones corresponden a colisiones simultáneas de tres o más bolas. El proceso posterior a tales choques múltiples no está definido. La regla general es, por tanto, ignorar las trayectorias del billar que chocan en  $D$ .

La formulación de Sinai de la Hipótesis de Boltzmann la coloca naturalmente en el contexto de billares en espacios de dimensión alta. Recordemos, para resumir, que el espacio es de dimensión  $2Nd - 2d - 1$  y que el número de cilindros es  $N(N - 1)/2$  donde  $N$  es el número de bolas y  $d$  es la dimensión del espacio donde se mueven las bolas.

**Gas de Lorentz.** Este es otro modelo muy popular en física. Imagínese una partícula puntual moviéndose entre dos bolas rígidas fijas, en el espacio  $\mathbb{R}^3$ . Las bolas tienen el mismo radio  $r$ . Pueden ser colocadas aleatoriamente o formar una estructura del tipo cristalina (por ejemplo, sus centros pueden colocarse en los vértices del reticulado –lattice–  $\mathbb{Z}^3$ ). Las bolas no se mueven, solamente una partícula puntual se mueve entre ellas y choca elásticamente. Las bolas actúan como obstáculos.

Este modelo fue introducido by H. Lorentz en 1905 en el estudio de electrones en metales. La partícula móvil representa un electrón, y las bolas juegan el papel de las moléculas del metal. Cuando las bolas están colocadas en los vértices de un reticulado regular, se dice que el gas de Lorentz es periódico.

En lugar de bolas, podemos colocar otros cuerpos idénticos en los vértices del reticulado, y requerir a la partícula móvil que choque con los obstáculos elásticamente. Los cuerpos pueden ser cúbicos o cuerpos poliédricos más generales. Uno también puede definir un gas de Lorentz en un plano; en este caso obstáculos bidimensionales son colocados en los vértices del reticulado  $\mathbb{Z}^2$ .

Reducimos ahora el gas de Lorentz a un billar. De hecho él es “casi” un billar, excepto que el dominio por el que puede andar la partícula no es acotado y tiene volumen infinito. Esto se soluciona fácilmente porque desde que los obstáculos están colocados en los vértices del reticulado, su estructura es periódica y uno puede encontrar un **dominio fundamental**  $H$ , o sea un domino cuya traslación paralela cubra todo el espacio. El dominio  $H$  contiene sólo unos pocos (a veces

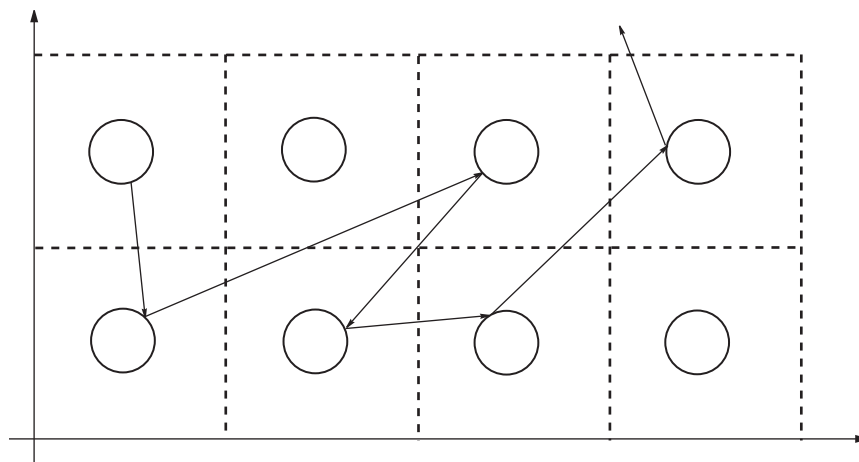


Figura 8: Gas de Lorentz periódico.

sólo uno) obstáculos, y todos los otros se obtienen por la traslación paralela de aquéllos en  $H$ . La Figura 8 muestra un gas periódico de Lorentz en un plano, donde los obstáculos son discos fijos y el dominio fundamental es un cuadrado conteniendo un disco.

El movimiento de la partícula puede ser proyectado al dominio fundamental  $H$  y tendremos un sistema de billar en  $H$  con condiciones de frontera periódicas, eso es un billar en el toro  $\mathbb{T}^d$ ,  $d = 2, 3$ . La mesa del billar  $\mathbf{Q}$  se obtiene sacando uno o varios obstáculos del toro. En el caso del gas de Lorentz de la Figura 8 estamos nuevamente ante el billar de la Figura 1.

**Billares de Sinai.** Para explicar de manera más simple las principales características de los sistemas que hemos venido describiendo, nos restringiremos al modelo de las bolas duras con  $N = 2$  y  $d = 2$ , o sea, consideraremos dos bolas (discos) en el toro  $\mathbb{T}^2$ . Entonces  $\partial\mathbf{Q}$  es la unión de un número finito de curvas regulares y los vectores  $v$  están en la (media) circunferencia  $\mathcal{S}_1$ .

Podemos dar un paso más y suponer que uno de los discos está fijo y que sólo el centro del otro se mueve. Llegamos así al billar que analizamos en la Sección 1, Figura 1. Más aún, para no restringirnos al toro, podemos considerar mesas de billar en el plano que satisfacen las principales propiedades dinámicas de aquel billar en  $\mathbb{T}^2$ . Los billares planos que surgen del modelo de las bolas duras para  $N = 2$  y  $d = 2$  son como los de la Figura 9. Su ergodicidad fue probada por Sinai en 1970 y son llamados **billares dispersores de Sinai** (ver la definición de arcos dispersores en la Sección 2).

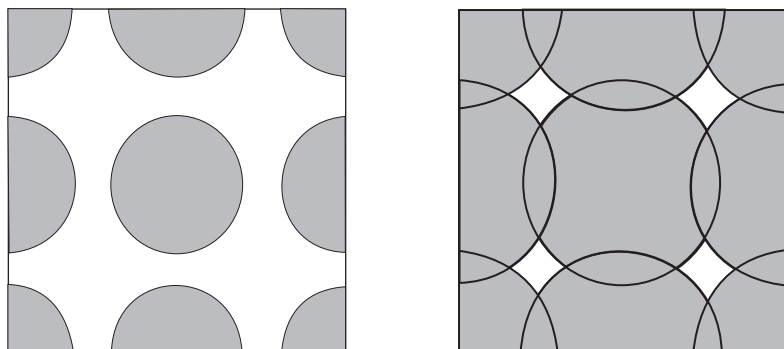


Figura 9: Billares dispersores. (a) Cuadrado de lado 1 y radio  $0 < r < 1/4$ . (b) Cuadrado de lado 1 y radio  $1/4 \leq r < 1/2$

Es claro que podemos considerar billares planos cuyas fronteras no son generadas por condiciones derivadas de modelos físicos y preguntarnos cómo deben ser las fronteras para que la correspondiente transformación de billar sea ergódica. En particular es interesante saber cómo “montar” una mesa de billar para que su sistema dinámico sea ergódico. Está demostrado que el billar en el estadio de Bunimovich (dos semicircunferencias unidas por segmentos paralelos), en la cardioide y en muchos estadios elípticos son ergódicos y satisfacen otras propiedades estocásticas. En el caso del estadio elíptico descrito en la Sección 3, si  $a < \sqrt{2}$ , para tener un billar ergódico la separación entre las dos mitades debe crecer tendiendo a infinito a medida que  $a$  crece tendiendo a  $\sqrt{2}$ . Ver [11]. Para el billar de la Figura 6, si  $a \geq \sqrt{2}$  no es posible construir estadios elípticos ergódicos.

## 8 Cómo se prueba la Ergodicidad de los Billares

Desde ya debemos aclarar que si bien seguiremos usando el término ergódico para los sistemas dinámicos con el tipo de desorden (caos) definido en la Sección 5, en realidad en casi todos esos casos se han probado propiedades estadísticas mucho más fuertes.

De una forma u otra, la prueba de la ergodicidad de los sistemas dinámicos diferenciables pasa por la prueba de algún tipo de hiperbolicidad (ver Sección 6). El procedimiento padrón es el estudio de los exponentes de Liapunov de la transformación y la aplicación de la llamada Teoría de Pesin, que permite construir las curvas expansoras y contractoras a las que nos referimos anteriormente. Para evitar mayores complicaciones técnicas vamos a suponer que

trabajamos en el espacio euclidiano  $\mathbf{R}^d$ ,  $d \geq 2$ . Quien quiera un modelo aún más intuitivo puede pensar en el plano.

Si  $p$  es un punto fijo de un difeomorfismo  $S$  ( $S$  y su inversa tienen derivadas continuas,  $S(p) = p$ ) definido en un conjunto de  $\mathbf{R}^d$  y queremos analizar el comportamiento de  $S$  en un entorno de  $p$ , como primera aproximación podemos estudiar su parte lineal, o sea, la derivada (diferencial)  $(S)'_p : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$ . Si  $\alpha_i$  son las raíces reales del polinomio característico y  $v_i$  sus respectivos vectores propios, tendremos que  $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} 1/n \log \|(S^n)'_p v_i\| = \log |\alpha_i|$ . Para el caso de autovalores complejos (que aparecen de a pares conjugados  $\alpha_j, \bar{\alpha}_j$ ), esta igualdad se verifica para  $v_j$  contenido en subespacios de dimensión igual al doble de la multiplicidad de  $\alpha_j$ . Observe que eso no ocurre si en lugar del autovector  $v_i$  tomamos cualquier vector  $v$ . Llamamos **exponentes de Liapunov** a estos números  $\log |\alpha_i| = \lambda_i$ . Es fácil ver que la parte lineal de la transformación  $S$  (su diferencial) expande en los subespacios correspondientes a los autovectores con exponente de Liapunov  $\lambda_i > 0$  y contrae en los subespacios correspondientes a los autovectores con exponente de Liapunov  $\lambda_i < 0$ . En cualquier caso, no debemos considerar el vector nulo en esos subespacios.

Si existe una medida  $\mu$  invariante por  $S$ , un célebre teorema de Oseledets establece la existencia del límite que define a los exponentes de Liapunov para  $\mu$ -casi todo punto  $p$ , independientemente de si éste es periódico o no. El teorema de Oseledets puede ser aplicado a transformaciones  $S$  definidas en conjuntos mucho más generales. Para extenderlo al caso de los billares con los que trabajamos daremos un enunciado en el contexto más general de **transformaciones continuas con singularidades**. Para evitar la introducción de notaciones que complican la comprensión de lo que es realmente importante, nos restringiremos a trabajar en  $\mathbf{R}^d$ . Para un enfoque más detallado y general se puede consultar [9], [10], [2].

Sea  $M$  la unión de un número finito de regiones en  $\mathbf{R}^d$ , pegadas a lo largo de “hipersuperficies” cuya unión está contenida en el conjunto de las **singularidades**  $D$ . Este conjunto, a su vez, es la unión de un conjunto finito de variedades cerradas de dimensión menor que  $d$  (si  $d = 2$ ,  $D$  es la unión de un número finito de curvas y puntos). El conjunto  $P = M \setminus D$  es abierto. Sea  $\mu$  una medida de probabilidad definida sobre los borelianos de  $M$ .

Sea  $S : P \rightarrow M$  una transformación con inversa, ambas suficientemente diferenciables (difeomorfismo de clase  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , para el teorema de Oseledets, y  $r \geq 2$  para el resto de la teoría), de  $P$  en su imagen, que preserve la medida  $\mu$  y que verifique algunas otras condiciones de crecimiento de la derivada cerca de las singularidades. Sea  $H$  el conjunto de los puntos que tienen infinitos iterados tanto para el futuro como para el pasado:  $H = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} S^n P$ ; por tanto  $\mu(H) = 1$ . Entonces, el **teorema de Oseledets** dice que para casi todo punto  $p \in H$  existen  $m(p)$  números reales  $\lambda_i(p) : \lambda_1(p), \lambda_2(p), \dots, \lambda_{m(p)}(p)$  y

subespacios  $E_1(p), E_2(p), \dots, E_{m(p)}(p)$ , tales que

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|(S^n)'_p v_i\| = \lambda_i(p) \quad \text{para todo vector no nulo } v_i \in E_i(p).$$

$E_i(p)$  es el **subespacio propio del exponente de Liapunov**  $\lambda_i(p)$ . Estos números pueden variar con  $p$ , pero son invariantes a lo largo de su órbita:  $\lambda_i(S^n(p)) = \lambda_i(p)$ . El teorema de Oseledets asegura que para casi todo punto (puntos **regulares**) del espacio donde actúa una transformación que preserva medida, el comportamiento de los puntos próximos a su órbita puede ser aproximado teniendo en cuenta el comportamiento en direcciones conocidas, que serán contracciones o expansiones según  $\lambda_i$  sea menor o mayor que cero.

Estos subespacios y exponentes de Liapunov se comportan asintóticamente como los subespacios propios y el logaritmo del valor absoluto de los autovalores de una matriz. ¿Cómo deducir de propiedades de esos números propiedades de la función  $S$ , en particular propiedades relacionadas con la hiperbolicidad?

La respuesta a esta pregunta es dada por la llamada **Teoría de Pesin**, que trata, en primer lugar, de la construcción de **variedades invariantes** expansivas y contractivas en puntos en que hay exponente de Liapunov no nulos.

No seremos muy rigurosos en los enunciados de los teoremas de Pesin, ni los presentaremos con su máxima generalidad, para no complicar la exposición. Definimos la **región de Pesin**,  $\Sigma$ , como el conjunto de los puntos regulares  $p$  para los que todos los exponentes de Liapunov son diferentes de cero ( $\lambda_i(p) \neq 0$  para todo  $1 \leq i \leq m(p)$ ). Entonces para cada punto  $p \in \Sigma$  existen variedades invariantes **estables** ( $W^s(p)$ ) e **inestables** ( $W^u(p)$ ) cuyos puntos se aproximan o se apartan respectivamente entre si cuando iteramos por  $S$ . La suma de las dimensiones de estas variedades es igual a la dimensión de todo el espacio, y cada una de ellas es tangente al hiperplano (subespacio) generado por los vectores con exponentes de Liapunov negativos ( $W^s(p)$ ) o positivos ( $W^u(p)$ ). Además,  $\Sigma$  puede ser descompuesto en un conjunto numerable de subconjuntos invariantes, en cada uno de los cuales  $S$  es ergódica.

Si la región de Pesin tiene medida total ( $\mu(\Sigma) = 1$ ) se dice que  $S$  es (**no uniformemente**) **hiperbólica** o que el sistema  $(M, S, \mu)$  tiene **comportamiento caótico**. Usamos la expresión no uniformemente porque los ángulos entre los subespacios estables e inestables, así como los  $\lambda(p)$ , puede aproximarse mucho a cero, generando una serie de dificultades en el control de las propiedades básicas de la hiperbolicidad.

Entonces, si los exponentes de Liapunov son no nulos en casi todo punto de  $H$  (o de  $P$  o  $M$ ) entonces en casi todo punto tenemos variedades inestable y estable local (cuyos puntos cuando iterados por  $S^n$  se aproximan o se alejan exponencialmente cuando  $n \rightarrow \infty$ ); la suma de sus dimensiones es  $d$ . Más aún, la segunda parte del teorema establece que existe un conjunto numerable  $\Sigma_i$  de **componentes ergódicas**, o sea, conjuntos de medida positiva que no poseen

subconjuntos  $S$ -invariantes con medida mayor que cero y menor que uno:  $S$  es caótica dentro de cada  $\Sigma_i$ .

De esta manera el problema de probar la ergodicidad de todo el sistema se transforma en probar: 1) que los exponentes de Liapunov son no nulos  $\mu$ -casi todo punto y, por tanto, 2) que la componente ergódica es única.

Existen dos maneras tradicionales de atacar el primer problema: mostrar que

**A)** en casi todo punto  $x \in N$  existen **conos**  $C(x)$  invariantes por  $S' : S'_x(C(x)) \subset C(S(x))$  (un cono  $C(x) \subset \mathbf{R}^2$ , por ejemplo, es una región angular con vértice en  $x$ , ver Figura 10); o

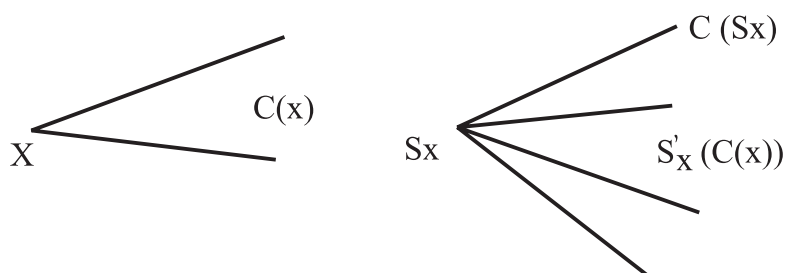


Figura 10: Cono invariante  $C(x)$ .

**B)** en casi todo punto  $x \in N$  puede ser definida una **forma cuadrática** no degenerada  $Q_x$  creciente a lo largo de las órbitas de  $S : Q_{S(x)}(S'_x v) - Q_x v > 0$  (\*) si  $v$  es cualquier vector con origen en  $x$ . Una forma cuadrática es determinada por una matriz  $A_x$  simétrica siendo  $Q_x : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ , definida por  $Q_x v = v^t A v$ ; si  $A$  no tiene autovalores nulos, se dice que  $Q$  es no degenerada.

A) y B) son esencialmente equivalentes; en particular observamos que el conjunto  $\{v : Q_x v > 0\}$  constituye un cono  $C(x)$ . Si una de las condiciones es verificada, el sistema dinámico  $(M, S, \mu)$  tiene exponentes de Liapunov no nulos  $\mu$ -casi todo punto.

Las condiciones para dar pruebas del segundo problema (unicidad de la componente ergódica) son más complejas. Intentaremos explicarlas en el contexto de la hiperbolicidad (no uniforme) probada por el método B), y suponiendo que  $d = 2$ . Si además de B), el sistema  $(M, S, \mu)$  con  $M \subset \mathbf{R}^2$  verifica las condiciones siguientes, entonces el sistema es ergódico (ver [8] y [10]):

B1) para cada  $n \in \mathbf{N}$ , las órbitas con  $n$  iteraciones que comienzan y terminan en el conjunto de las singularidades  $D$  constituyen un conjunto finito;

B2) las tangentes a  $D$  están en los conos de vectores donde la forma cuadrática  $Q$  es estrictamente positiva o negativa;

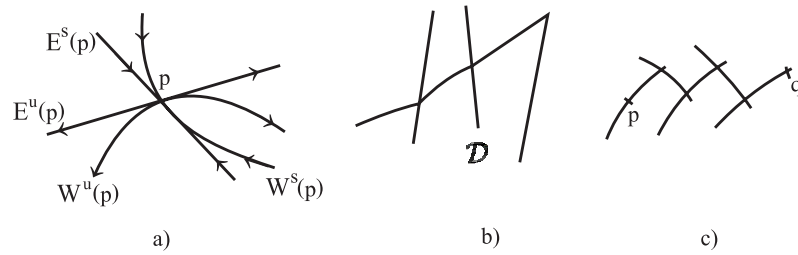


Figura 11: a) Subespacios estables e inestables  $[E^{s,u}(p)]$  y sus variedades locales  $W^{s,u}(p)$ ; b) Particiones de  $S^n(W^u(p))$  por  $D$ ; c) Zig-zag de variedades estables e inestables uniendo  $p, q$ .

B3) para casi todo punto de  $D$ , sus órbitas entran de manera recurrente en regiones donde  $Q$  crece uniformemente. Esto significa que en la expresión (\*) la diferencia es mayor que una constante positiva  $\delta$ ;

B4) la medida de los puntos cuyas variedades invariantes (estable e inestable) cortan  $D$  y tienen longitud mayor que  $\epsilon$ , es menor que  $\text{cte} \cdot \epsilon$ ;

B5) existe un  $x \in H$  tal que su órbita  $\{S^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  pasa por todas las componentes conexas por arcos de  $N$ .

Las variedades inestables locales  $W^u(x)$ , al evolucionar por  $S$ , se van partiendo al cortarse con  $D$  (recordamos que en  $D$  la función  $S$  o su inversa no está definida). Estas condiciones aseguran que aún así, los trechos cortados se hacen suficientemente largos al continuar iterándolos: **la hiperbolicidad prevalece sobre el fraccionamiento**. El hecho de que las variedades invariantes sean suficientemente largas implica que podemos unir dos puntos de un entorno de casi todo punto con un zig-zag de arcos estables e inestables; ver Figura 11.

## 9 Probando la Hipótesis de Boltzmann-Sinai

La principal dificultad con el modelo de los gases, en su formulación billarística, es que si el obstáculo es no estrictamente convexo (cilindros, por ejemplo, ver Figura 12), no es simple probar la existencia de exponentes de Liapunov diferentes de cero; y es aún más difícil probar la unicidad de la componente ergódica.

Krylov y Sinai ya habían observado que mientras un billar con obstáculos estrictamente convexos se comportan como un sistema dinámico “bien” hiperbólico, cuando los obstáculos no son estrictamente convexos, existe apenas hiperbolicidad parcial. Los obstáculos de las Figuras 1, 8, 9 y 13 son estrictamente convexos (el billar es **dispersor**), mientras que los de las Figuras 12 y 14 son apenas convexos (el billar es **semidispersor**).

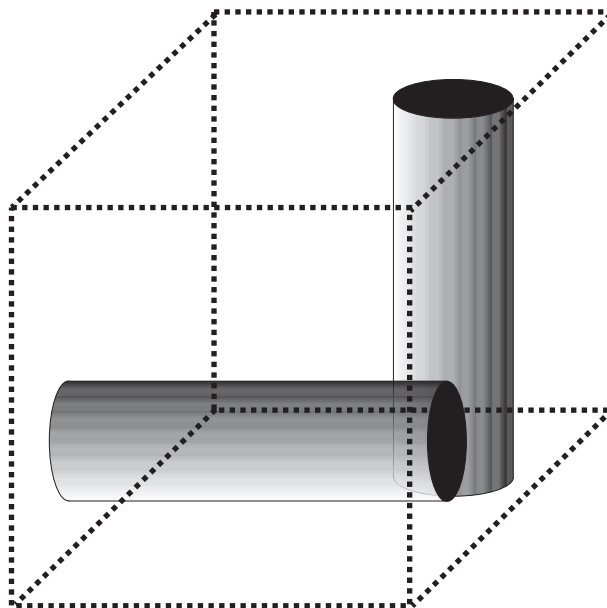


Figura 12: Obstáculos cilíndricos que aparecen en la formulación billarística del modelo de los gases.

Geoméricamente, el mecanismo de generación de hiperbolicidad puede ser ilustrado con imágenes inspiradas en la óptica, como ya sugiriéramos en la Sección 2 al definir componentes focalizadoras y dispersoras de la frontera. Consideremos, como en la Figura 13, un obstáculo estrictamente convexo que oficia de espejo. Consideremos también un frente de onda plano (que corresponde a dar un punto  $x = (Q, V)$  en el espacio de fase  $M$ , considerar en el espacio de configuraciones – donde realmente ocurre el movimiento – un hiperplano  $\Gamma$  por  $Q$  y, en cada punto de ese hiperplano, tomar vectores paralelos a  $V$ ). Entonces, luego que el frente de ondas alcance el espejo, el se vuelve estrictamente convexo y las distancias lineales medidas a partir de  $\Gamma$  son uniformemente expandidas. Éste es exactamente el mecanismo que genera la hiperbolicidad uniforme en los billares. En este caso las dificultades vienen, como ya fue en parte observado, de la existencia de trayectorias tangentes que hacen que el sistema pierda diferenciabilidad.

Si los obstáculos no son estrictamente convexos aparecen situaciones como las de la Figura 14 en el hiperplano  $\Gamma$  no es curvada en todas las direcciones: las trayectorias que chocan con una directriz del cilindro (las rectas paralelas al eje, en la figura) salen paralelas, son “neutras”, y por tanto no se separan



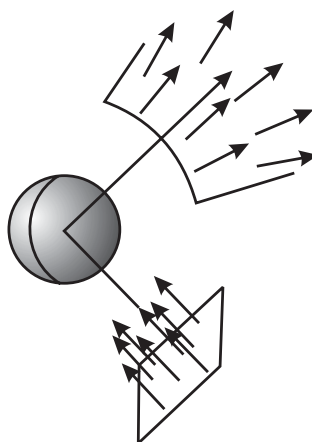


Figura 13: Obstáculo estrictamente convexo: un haz paralelo es completamente dispersado después del choque.

ni aumentan las distancias medidas a partir de  $\Gamma$ . Esta dirección neutra puede desaparecer debido a otros choques con otros cilindros. El hecho de que la hiperbolicidad global (la expansión en todos los sentidos) sea obtenida a través de muchos choques con obstáculos, lleva naturalmente a la introducción del concepto de *suficiencia* de las trayectorias, cuya descripción intuitiva damos a continuación.

Sea  $S^{[a,b]}x$  un segmento finito de trayectoria que no pasa por singularidades, o sea, tal que  $S^j x \notin D$  para  $j \in [a, b]$ . Sea  $S^a x = (Q, V) \in P$  y consideremos el hiperplano  $\tilde{\Gamma}(S^a x) := \{(Q + dQ, V) : dQ \in \mathbb{R}^d, \text{pequeño, perpendicular a } V\}$ . Decimos que un segmento de trayectoria  $S^{[a,b]}x$  es **suficiente** si  $\pi(S^b \tilde{\Gamma})$  es estrictamente convexo. Un punto del espacio de fase  $x \in P$  es suficiente si su trayectoria es suficiente, o sea, si contiene un segmento de trayectoria suficiente.

Si el segmento de trayectoria no es suficiente, la curvatura de  $\pi(S^b \tilde{\Gamma})$  en  $\pi(S^b x)$  necesariamente se anula en alguna dirección, formando el así llamado **subespacio neutro**. No es difícil ver que en el entorno de un punto suficiente los exponentes de Liapunov relevantes son no nulos.

Esas observaciones llevan al no trivial

**Teorema Fundamental de los Billares Semidispersores (Sinai- Chernov [17]).** *Si en un billar semidispersor se satisfacen las condiciones geométricas y de hiperbolicidad relacionadas con las singularidades (ver B1) - B4) en la Sección anterior), entonces todo punto  $x \in P$  suficiente tiene un entorno perteneciente a una componente ergódica del sistema (ver comentarios después de los Teoremas de Pesin).*

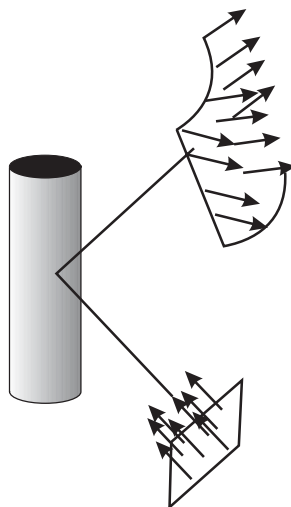


Figura 14: Obstáculo no estrictamente convexo: existen direcciones en que vectores del haz paralelo incidente no son dispersados.

A partir de este teorema Sinai y Chernov probaron en 1987 que el sistema formado por  $N = 2$  bolas en el  $d$ -toro es un sistema ergódico.

Los resultados posteriores fueron obtenidos por los matemáticos húngaros Krámlí, Simányi y Szász, quienes entre 1990 y 1992 extendieron los resultados para tres y cuatro bolas en el  $d$ -toro, con  $d \geq 2$  (ver [4], [5]).

La obtención de resultados muy dependientes del número de bolas se debe a las dificultades para evitar el problema de la suficiencia al aumentar la dimensión del espacio en que se trabaja y el número de cilindros.

Esas dificultades fueron resueltas de manera parcial, muy recientemente por Simányi y Szász, introduciendo condiciones que permiten analizar cuán pequeño es el conjunto no suficiente (debe ser formado por la unión de un conjunto numerable de variedades de codimensión mayor o igual a dos). Esa pequeñez relativa permite obtener una rica estructura de colisiones entre las bolas, asegurando las condiciones a que se refiere el teorema fundamental.

Aún así no consiguieron probar el carácter ergódico del sistema de bolas elásticas, sino sólo la no anulación de los exponentes de Liapunov en casi todo punto. Eso permite aplicar la segunda parte de los teoremas de Pesin, y deducir que existe un conjunto numerable de componentes ergódicas. Los autores comentan: “Our methods so far do not give the expected global ergodicity.”.

Como novedad, estudian el movimiento de bolas de masas distintas  $\vec{m} = (m_1, m_2, \dots, m_N) \in \mathbb{R}_+^N$ , al contrario de todos los trabajos anteriores y de

la hipótesis original, donde las masas son iguales. Pero el teorema resultante vale para  $\vec{m}$  fuera de un conjunto pequeño de  $\mathbb{R}_+^N$  ( $\vec{m}$  no pertenece a una unión numerable de subvariedades analíticas propias).

Simányi y Szász probaron el siguiente

**Teorema [12].** *Si  $N \geq 2$ ,  $d \geq 2$ ,  $\vec{m} = (m_1, m_2, \dots, m_N) \in \mathbb{R}_+^N$  son las masas de las bolas y sus radios son iguales a  $r = R_0(N, d)$  entonces el sistema  $(M, S, \mu)_{\vec{m}}$  tiene todos sus exponentes de Liapunov relevantes no nulos si  $\vec{m}$  está fuera de un conjunto “pequeño” de  $\mathbb{R}_+^N$ .*

Este resultado fue mejorado en trabajos más recientes de Simányi, quien probó que todo sistema de bolas duras en un toro de cualquier dimensión es hiperbólico y que en el toro de dimensión 2, casi todos estos sistemas son ergódicos.

Los últimos progresos en la dirección de probar la ergodicidad del modelo de Boltzmann-Sinai ha llevado a la utilización de herramientas refinadas de geometría algebraica. Chernov, Simányi y Szász (y sus alumnos) continúan trabajando en esos temas. Recientemente han aparecido nuevas complicaciones porque se ha probado que la curvatura de las variedades invariantes puede no ser acotada como hasta entonces se había aceptado.

## Conclusión

Hoy en día no es clara la relevancia **para la Física** de la Hipótesis Ergódica y de los resultados matemáticos al respecto. Sin embargo, la discusión de su contenido y su presentación rigurosa tuvo y tiene un impacto muy grande tanto en la Física como en la Matemática. Contribuyeron de manera fundamental para el desarrollo de la Mecánica Estadística y de la Teoría Ergódica de los Sistemas Dinámicos y, de manera general, para el estudio formalizado de los movimientos caóticos.

**Agradecimientos.** Con Dómokos Szász y Nikolai Chernov mantuve interesantes conversaciones sobre estos temas. Varias partes de estas notas están inspiradas en el artículo [18]. Sylvie Oliffson, Sônia Pinto y Nikolai Chernov colaboraron con la confección de varias de las figuras.

## Referencias

- [1] D. Burago, S. Ferleger & A. Kononenko, *Uniform estimates on the number of collisions in semi-dispersing billiards*, Ann. of Math. **147** (1998), 695–708.
- [2] N Chernov & R. Markarian, *Introduction to the ergodic theory of chaotic billiards*, IMCA, Lima, 2001.
- [3] I. P. Cornfeld, S. V. Fomin & Ya. G. Sinai, *Ergodic Theory*, Springer, Berlín, 1982.

- 
- [4] A. Krámli, N. Simányi & D. Szász, *The K-Property of Three Billiard Balls*, Annals of Mathematics, **133** (1991), 37–72.
- [5] A. Krámli, N. Simányi & D. Szász, *The K-Property of Four Billiard Balls*, Commun. Math. Phys., **144** (1992), 107–142.
- [6] R. Mañé, *Introducao à Teoria Ergódica*, IMPA, Rio de Janeiro, 1986.
- [7] R. Mañé, *Global Variational Methods in Conservative Dynamics*, IMPA, Rio de Janeiro, 1991.
- [8] R. Markarian, *Billiards with Pesin region of measure one*, Comm. Math. Phys. **118** (1988), 87–97.
- [9] R. Markarian, *Introduction to the ergodic theory of plane billiards* en Dynamical Systems. Santiago de Chile 1990, R. Bamón, R. Labarca, J. Lewowicz, and J. Palis, editors, Longman, 1993, 327–439.
- [10] R. Markarian, *New ergodic billiards: exact results*, Nonlinearity, **6** (1993), 819–841.
- [11] R. Markarian, S. Oliffson & S. Pinto, *Chaotic properties of the elliptical stadium*, Commun Math. Phys., **174** (1996), 661–679.
- [12] N. Simányi & D. Szász, *Hard ball systems are completely hyperbolic*, Ann. of Math. **149** (1999), 35–96.
- [13] N. Simányi, *Ergodicity of hard spheres in a box*, Ergodic Theory Dynam. Systems **19** (1999), 741–766.
- [14] Ya. G. Sinai, *On the Foundation of the Ergodic Hypothesis for a Dynamical System of Statistical Mechanics*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **153** (1963), 1261–1264
- [15] Ya.G. Sinai, *Dynamical systems with elastic reflections. Ergodic properties of dispersing billiards*, Russ. Math. Surv. **25** (1970), 137–189.
- [16] Ya.G. Sinai, *Development of Krylov's ideas*, Afterwards to N.S. Krylov, *Works on the foundations of statistical physics*, Princeton Univ. Press, 1979, 239–281.
- [17] Ya.G. Sinai & N.I. Chernov, *Ergodic properties of some systems of 2-dimensional discs and 3-dimensional spheres*, Russ. Math. Surv. **42** (1987), 181–207.
- [18] D. Szász, *Boltzmann's ergodic hypothesis, a conjecture for centuries?*, Studia Sci. Math. Hung. **31** (1996), 299–322.

- [19] D. Szász, Editor *Hard Ball Systems and the Lorentz gas*, Springer, Berlin, 2000.

ROBERTO MARKARIAN  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA  
“PROF. ING. RAFAEL LAGUARDIA”  
IMERL, FACULTAD DE INGENIERÍA  
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA  
C.C. NRO. 30, MONTEVIDEO, URUGUAY  
e-electrónico: roma@fing.edu.uy; Fax: (598-2)-711 5446

## Real and Complex Fundamental Solutions — A Way for Unifying Mathematical Analysis.\*

Wolfgang Tutschke

### Goal of the mini-course

The Fundamental Theorem of Calculus says that a differentiable function  $h$  defined in an interval  $a \leq x \leq b$  can be recovered from its derivative  $h'$  and its boundary values:

$$h(x) = h(a) + \int_a^x h'(\xi) d\xi.$$

The mini-course will show that an analogous result is true for partial differential operators:

Suppose  $\mathcal{L}$  is a differential operator of order  $k$ . Moreover, let  $u$  be a function defined and  $k$  times continuously differentiable in the closure of a domain  $\Omega$  of  $\mathbf{R}^n$ . Provided the adjoint differential operator possesses a fundamental solution, we shall see that  $u$  can be recovered from  $\mathcal{L}u$  and the boundary values of  $u$ . Strictly speaking, we shall get an integral representation of  $u$  in form of the sum of two integrals. One of them is a boundary integral, the other is a domain integral whose integrand is the product of  $\mathcal{L}u$  and the fundamental solution of the adjoint operator. Such integral representations can be used for solving boundary value problems.

Since for getting this result we need basic concepts of distribution theory, the mini-course will also include an elementary approach to distribution theory as far as it will be essential for our goals.

While the first part of the mini-course (Section 1) will prove general statements, the second part (Section 2) will consider the case of the complex plane more in detail. This concerns, especially, boundary value problems for non-linear systems in the plane.

---

\*Lecture Notes of a mini-course given at Simón Bolívar University, Caracas, Venezuela, 12.-23. November 2001

The third part (Section 3), finally, deals with initial value problems of type

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \mathcal{F}\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) \\ u(0, x) &= \varphi(x).\end{aligned}$$

We shall see that such initial value problems can be solved using interior estimates for solutions of elliptic differential equations. Since interior estimates can be obtained from integral representations by fundamental solutions, the above mentioned initial value problems can also be solved within the framework of the theory of fundamental solutions.

At the end of the mini-course (Section 4) we shall discuss some further generalizations and open problems.

## 1 Integral representations using fundamental solutions

### 1.1 Differential operators of divergence type and their Green's Formulae

Let  $\Omega$  be a bounded domain in  $\mathbf{R}^n$  with sufficiently smooth boundary. A differential operator  $\mathcal{L}$  of order  $k$  is called a differential operator of *divergence type* if there exist another operator  $\mathcal{L}^*$  of order  $k$  and  $n$  differential operators  $P_i$  of order  $k - 1$  such that

$$v\mathcal{L}u + (-1)^{k+1}u\mathcal{L}^*v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial x_i}[u, v],$$

$u$  and  $v$  being  $k$  times continuously differentiable. The operator  $\mathcal{L}^*$  is called *adjoint* to  $\mathcal{L}$ . In case  $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$ , the operator  $\mathcal{L}$  is called *self-adjoint*.

**Example 1** The Laplace operator  $\mathcal{L} = \Delta$  is a self-adjoint differential operator of divergence type because

$$P_i = v \frac{\partial u}{\partial x_i} - u \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

leads to

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial x_i}[u, v] = v\Delta u - u\Delta v.$$

**Example 2**

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij}(x) \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_k b_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + c(x)u$$

is a differential operator of divergence type. Here we have

$$P_i = v \sum_j a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} - u \sum_j a_{ji} \frac{\partial v}{\partial x_j} + b_i uv,$$

and the adjoint differential operator is

$$\mathcal{L}^* v = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ji}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i(x)v) + c(x)v.$$

Applying the Gauss Integral Formula, one gets the following *Green Integral Formula* for differential operators of divergence type

$$\int_{\Omega} (v \mathcal{L}u + (-1)^{k+1} u \mathcal{L}^* v) dx = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n P_i[u, v] N_i d\mu \quad (1)$$

where  $(N_1, \dots, N_n) = N$  is the outer unit normal and  $d\mu$  is the measure element of  $\partial\Omega$ .

## 1.2 The concept of distributional solutions

Using the Green Integral Formula for differential operators of divergence type, one gets a characterization of solutions by integral relations. For this purpose introduce so-called *test functions*. A test function for a differential equation of order  $k$  is a  $k$  times continuously differentiable function vanishing identically in a neighbourhood of the boundary. Consequently, replacing  $v$  by a test function, the boundary integral in the Green Integral Formula (1) is equal to zero and thus we have

$$\int_{\Omega} (\varphi \mathcal{L}u + (-1)^{k+1} u \mathcal{L}^* \varphi) dx = 0 \quad (2)$$

for each choice of the test function  $\varphi$ .

Now assume that  $u$  is a classical solution of the differential equation  $\mathcal{L}u = 0$ , i.e.,  $u$  is  $k$  times continuously differentiable and the differential equation is pointwise satisfied everywhere in  $\Omega$ . Then (2) implies that

$$\int_{\Omega} u \mathcal{L}^* \varphi dx = 0 \quad (3)$$

for each choice of the test function  $\varphi$ . Conversely, if the relation (3) is satisfied for any  $\varphi$ , then one has also

$$\int_{\Omega} \varphi \mathcal{L}u dx = 0$$



for each  $\varphi$  in view of (2). Taking into account the Fundamental Lemma of Variational Calculus, the last relation implies  $\mathcal{L}u = 0$  everywhere in  $\Omega$ . To sum up, the following statement has been proved:

*A  $k$  times continuously differentiable function  $u$  is a classical solution of  $\mathcal{L}u = 0$  if and only if relation (3) is true for each  $\varphi$ .*

On the other hand, it may happen that relation (3) is satisfied for each  $\varphi$  if  $u$  is only an integrable function. Then  $u$  is called a *distributional solution* of  $\mathcal{L}u = 0$ .

Similarly, if  $u$  is a (classical) solution of the inhomogeneous equation  $\mathcal{L}u = h$  where the right-hand side  $h = h(x)$  is a given function in  $\Omega$ , then instead of (3) the relation

$$\int_{\Omega} (\varphi h + (-1)^{k+1} u \mathcal{L}^* \varphi) dx = 0 \quad (4)$$

is satisfied for each  $\varphi$ . Therefore, a distributional solution of the inhomogeneous equation  $\mathcal{L}u = h$  is an integrable function  $u$  satisfying (4) for each  $\varphi$ .

### 1.3 The concept of fundamental solutions

In order to apply Green's Integral Formula to functions having an isolated singularity at an interior point  $\xi$  of  $\Omega$ , one has to omit a neighbourhood of  $\xi$ . Introduce the domain  $\Omega_{\varepsilon} = \Omega \setminus \overline{U_{\varepsilon}}$  where  $U_{\varepsilon}$  means the  $\varepsilon$ -neighbourhood of  $\xi$ . Notice that the boundary of  $\Omega_{\varepsilon}$  consists of two parts, the boundary  $\partial\Omega$  of the given domain  $\Omega$  and of the  $\varepsilon$ -sphere centred at  $\xi$ .

Now let  $u$  be any ( $k$  times continuously differentiable) function, while  $v = E^*(x, \xi)$  is supposed to be a solution of the adjoint equation  $\mathcal{L}^*v = 0$  having an isolated singularity at  $\xi$ . Then the Green Integral Formula applied to  $u$  and  $v = E^*(x, \xi)$  yields the relation

$$\int_{\Omega_{\varepsilon}} E^*(x, \xi) \mathcal{L}u dx = \quad (5)$$

$$\int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n P_i[u, E^*(x, \xi)] N_i d\mu + \int_{|x-\xi|=\varepsilon} \sum_{i=1}^n P_i[u, E^*(x, \xi)] N_i d\mu.$$

This relation leads to the concept of a fundamental solution (see [23]):

**Definition** The function  $v = E^*(x, \xi)$  is said to be a *fundamental solution* of the equation  $\mathcal{L}^*v = 0$  with the singularity at  $\xi$  if the following three conditions are satisfied:

1.  $E^*(x, \xi)$  is a solution of  $\mathcal{L}^*v = 0$  for  $x \neq \xi$ .
2. The boundary integral over the  $\varepsilon$ -sphere in (5) tends to  $(-1)^k u(\xi)$  as  $\varepsilon$  tends to zero, i.e., if one has

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-\xi|=\varepsilon} \sum_{i=1}^n P_i[u, E^*(x, \xi)] N_i d\mu = (-1)^k u(\xi)$$

where  $u$  is any  $k$  times continuously differentiable function.

3. The function  $E^*(x, \xi)$  is weakly singular at  $\xi$ , i.e., it can be estimated by

$$|E^*(x, \xi)| \leq \frac{\text{const}}{|x - \xi|^\alpha}$$

where  $\alpha < n$ .

**Example** If  $\omega_n$  means the surface measure of the unit sphere in  $\mathbf{R}^n$ , then

$$-\frac{1}{(n-2)\omega_n|x-\xi|^{n-2}}$$

is a fundamental solution of the Laplace equation in  $\mathbf{R}^n$ ,  $n \geq 3$ . Indeed, Example 1 of Section 1.1 implies that

$$\sum_i P_i[u, v] N_i = v \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial v}{\partial N}.$$

On the  $\varepsilon$ -sphere centered at  $\xi$  one has

$$\frac{\partial}{\partial N} = -\frac{\partial}{\partial r}$$

where  $r = |x - \xi|$ . Hence for  $v = c/r^{n-2}$  where  $c$  is a constant it follows

$$\sum_i P_i[u, v] N_i = -\frac{c}{\varepsilon^{n-2}} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{c(n-2)}{\varepsilon^{n-1}} \cdot u$$

on the sphere  $r = \varepsilon$ . Moreover,  $d\mu = \varepsilon^{n-1} d\mu_1$  where  $d\mu_1$  is the measure element of the unit sphere. This shows that the limit of the integral over the  $\varepsilon$ -sphere equals  $u(\xi)$  in case  $-c(n-2)\omega_n = 1$ .

#### 1.4 Integral representations for smooth functions

In view of the third condition on fundamental solutions (see the preceding Section 1.3), a fundamental solution is integrable in  $\Omega$  and thus the limiting process  $\varepsilon \rightarrow 0$  in (5) leads to the integral representation formula

$$u(\xi) = (-1)^{k+1} \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n P_i[u, E^*(x, \xi)] N_i d\mu + (-1)^k \int_{\Omega} E^*(x, \xi) \mathcal{L}u dx \quad (6)$$

where  $u$  is any  $k$  times continuously differentiable function and  $E^*(x, \xi)$  is a fundamental solution of the adjoint equation  $\mathcal{L}^*v = 0$ . Formula (6) is called the *generalized Cauchy-Pompeiu Formula* because in the special case of the Cauchy-Riemann operator in the complex plane it passes into the Cauchy-Pompeiu Formula. Replacing the function  $u$  in (6) by a ( $k$  times continuously differentiable) test function  $u = \varphi$ , one gets the important relation

$$\varphi(\xi) = (-1)^k \int_{\Omega} E^*(x, \xi) \mathcal{L}\varphi dx. \quad (7)$$

showing that a test function  $\varphi$  can be recovered from  $\mathcal{L}\varphi$  by an integration provided a fundamental solution of  $\mathcal{L}^*u = 0$  is known. Interchanging  $\mathcal{L}$  and  $\mathcal{L}^*$ , formula (7) leads to

$$\varphi(\xi) = (-1)^k \int_{\Omega} E(x, \xi) \mathcal{L}^*\varphi dx$$

Taking into account this relation, and using Fubini's Theorem for weakly singular integrals, the following theorem can be proved easily:

**Theorem 1** *Suppose  $E(x, \xi)$  is a fundamental solution of  $\mathcal{L}u = 0$  with singularity at  $\xi$ . Then the function  $u$  defined by*

$$u(x) = \int_{\Omega} E(x, \xi) h(\xi) d\xi \quad (8)$$

*turns out to be a distributional solution of the inhomogeneous equation  $\mathcal{L}u = h$ .*

**Proof** Denoting  $\Omega$  as domain of the  $x$ - and the  $\xi$ -space by  $\Omega_x$  and  $\Omega_\xi$  resp., one has

$$\int_{\Omega_x} u \mathcal{L}^*\varphi dx = \int_{\Omega_x} \left( \int_{\Omega_\xi} E(x, \xi) h(\xi) d\xi \right) \mathcal{L}^*\varphi dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\Omega_\xi} h(\xi) \left( \int_{\Omega_x} E(x, \xi) \mathcal{L}^* \varphi(x) dx \right) d\xi \\ &= (-1)^k \int_{\Omega_\xi} h(\xi) \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

### 1.5 Integral representations for solutions

Another important special case of a generalized Cauchy-Pompeiu Formula can be obtained for solutions of (homogeneous) differential equations. Suppose  $u$  is a solution of the differential equation  $\mathcal{L}u = 0$ , then formula (6) passes into the boundary integral representation

$$u(\xi) = (-1)^{k+1} \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n P_i[u, E^*(x, \xi)] N_i d\mu. \tag{9}$$

This formula (9) shows that each solution  $u$  can be expressed in (the interior of)  $\Omega$  by its values and its derivatives (up to the order  $k - 1$ ) on the boundary  $\partial\Omega$  of  $\Omega$ .

### 1.6 Reduction of boundary value problems to fixed-point problems

Next consider a non-linear equation of type

$$\mathcal{L}u = \mathcal{F}(\cdot, u) \tag{10}$$

where  $\mathcal{L}$  is again a differential operator of divergence type. Suppose  $u$  is a given solution of this equation (10). Define  $u_0$  by

$$u_0(x) = u(x) - \int_{\Omega} E(x, \xi) \mathcal{F}(\xi, u(\xi)) d\xi.$$

In view of the above Theorem 1 one gets  $\mathcal{L}u_0 = 0$ , i.e., to a given solution  $u$  of equation (10) there exists a solution  $u_0$  of the simplified equation  $\mathcal{L}u_0 = 0$  such that  $u$  satisfies the integral relation

$$u(x) = u_0(x) + \int_{\Omega} E(x, \xi) \mathcal{F}(\xi, u(\xi)) d\xi.$$

This statement leads to the following method for the construction of solutions of (10):

Let  $u$  be any function belonging to a suitably chosen function space. Define an operator by

$$U(x) = u_0(x) + \int_{\Omega} E(x, \xi) \mathcal{F}(\xi, u(\xi)) d\xi \quad (11)$$

where  $u_0$  is a solution of  $\mathcal{L}u_0 = 0$ . Then a fixed element of this operator satisfies equation (10).

Now suppose that a certain boundary condition

$$\mathcal{B}u = g$$

has to be satisfied. Choosing  $u_0$  as solution of the boundary value problem

$$\mathcal{B} \left( u_0 + \int_{\Omega} E(x, \xi) \mathcal{F}(\xi, u(\xi)) d\xi \right) = g$$

for  $\mathcal{L}u_0 = 0$ , one sees that all of the images  $U$  satisfy the given boundary condition. The same is true, consequently, for every possibly existing fixed element. To sum up, the following theorem has been proved:

**Theorem 2** *Boundary value problems for the non-linear differential equation  $\mathcal{L}u = \mathcal{F}(\cdot, u)$  can be constructed as fixed points of the operator (11) provided  $u_0$  is a solution of the simplified equation  $\mathcal{L}u = 0$  having suitably chosen boundary values.*

Examples for the solution of boundary value problems by fixed-point methods can be found, for instance, in Section 2.5 below where boundary value problems for non-linear elliptic first order systems in the plane are reduced to fixed-point problems using a complex normal form for the systems under consideration. In F. Rihawi's papers [17, 18] the Dirichlet boundary value problem for

$$\Delta^2 u = F(z, u)$$

is solved where  $\Delta$  is the Laplace operator in the  $z$ -plane. A fixed-point argument is also applied in C. J. Vanegas paper [28] where mainly non-linearly perturbed systems of form

$$D_0 w = f \left( x, w, \frac{\partial w}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial w}{\partial x_n} \right)$$

for a desired vector  $w = (w_1, \dots, w_m)$  in a domain in  $\mathbf{R}^n$  are considered,  $m \geq n$ . Here  $D_0$  is a matrix differential operator of first order with constant coefficients. Using the adjoint operator to  $D_0$  and the determinant of  $D_0$ , the Dirichlet boundary value problem can be reduced to a fixed-point problem.

**Remark** Note that to each differential operator  $\mathcal{L}$  belongs his own fundamental solution, in general. We shall see, however, that the Cauchy kernel

$$\frac{1}{z - \zeta}$$

of Complex Analysis (and its square) are sufficient in order to construct the necessary integral operators provided one uses a complex rewriting of the equations under consideration. In other words, general systems in the plane can be solved using the fundamental solution of the Cauchy-Riemann system (see the next Section 2)

## 2 Complex versions of the method of fundamental solutions

### 2.1 The Cauchy kernel as fundamental solution of the Cauchy-Riemann system

In the complex plane the Gauss Integral Formula for a complex-valued  $f$  reads

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{\partial\Omega} f dy \tag{12}$$

$$\text{and } \iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \int_{\partial\Omega} f dx. \tag{13}$$

Define the partial complex differentiations  $\partial/\partial z$  and  $\partial/\partial \bar{z}$  by

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Multiplying (13) by  $i$  and adding the multiplied equation to (12), one gets the following complex version of Gauss' Integral Formula

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy = \frac{1}{2i} \int_{\partial\Omega} f dz, \tag{14}$$

whereas subtraction gives

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial z} dx dy = -\frac{1}{2i} \int_{\partial\Omega} f d\bar{z}.$$

Substituting  $f = w_1 w_2$  into the complex version (14) of Gauss' Integral Formula, one obtains the complex Green Formula

$$\iint_{\Omega} \left( w_1 \frac{\partial w_2}{\partial \bar{z}} + w_2 \frac{\partial w_1}{\partial \bar{z}} \right) dx dy = \frac{1}{2i} \int_{\partial \Omega} w_1 w_2 dz. \quad (15)$$

This formula is the special case of (1) for the Cauchy-Riemann operator

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

It shows that the Cauchy-Riemann operator  $\partial/\partial \bar{z}$  is self-adjoint.

Applying this complex Green Integral Formula with

$$w_1 = w \quad \text{and} \quad w_2 = \frac{c}{z - \zeta}$$

in  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{U_\varepsilon}$  (where  $c$  is a complex constant), one gets

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \frac{c}{z - \zeta} dx dy \\ &= \frac{1}{2i} \int_{\partial \Omega} w(z) \frac{c}{z - \zeta} dz - \frac{1}{2i} \int_{|z - \zeta| = \varepsilon} w(z) \frac{c}{z - \zeta} dz \end{aligned} \quad (16)$$

which is the special case of (5) for the Cauchy-Riemann operator. The second term on the right-hand side tends to

$$-\frac{1}{2i} w(\zeta) c \cdot 2\pi i$$

as  $\varepsilon$  tends to zero. Consequently,

$$E(z, \zeta) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{z - \zeta} \quad (17)$$

turns out to be a fundamental solution of the Cauchy-Riemann system. Moreover, formula (16) leads to the Cauchy-Pompeiu Formula

$$w(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \Omega} \frac{w(z)}{z - \zeta} dz - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z - \zeta} dx dy. \quad (18)$$

Note that (18) is the special case of formula (6) in Section 1.4 for the Cauchy-Riemann operator  $\mathcal{L} = \partial/\partial \bar{z}$ .

## 2.2 Complex normal forms for linear and non-linear first order systems in the plane

Let  $\Omega$  be a bounded domain in the  $x, y$ -plane with sufficiently smooth boundary. We are looking for two real-valued functions  $u = u(x, y)$  and  $v = v(x, y)$  satisfying a system of form

$$H_j \left( x, y, u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \quad j = 1, 2, \quad (19)$$

in  $\Omega$ . One of the simplest special cases of this system is the Cauchy-Riemann system

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

which can be written in the complex form

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$$

where  $z = x + iy$  and  $w = u + iv$ . In order to get an analogous complex rewriting of the system (19), we use the formulae

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Now introduce the following abbreviations:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= p_1 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= p_2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= q_1 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= q_2. \end{aligned}$$

Then one has

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= p_1 + q_1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -p_2 + q_2 \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= p_2 + q_2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= p_1 - q_1. \end{aligned}$$



Substituting these expressions into the system (19), this system passes into

$$H_j(x, y, u, v, p_1 + q_1, -p_2 + q_2, p_2 + q_2, p_1 - q_1) = 0, \quad j = 1, 2.$$

Now suppose that this system can be solved for  $q_1$  and  $q_2$ . Then one gets real-valued representations

$$q_j = F_j(x, y, u, v, p_1, p_2), \quad j = 1, 2. \quad (20)$$

Since  $x + iy = z$ ,  $u + iv = w$  and  $p_1 + ip_2 = \partial w / \partial z$ , the variables on the right-hand sides of these equations can be expressed by  $z$ ,  $w$  and  $\partial w / \partial z$  (and their conjugate complex values). Denoting  $F_1 + iF_2$  by  $F$ , and taking into consideration that  $q_1 + iq_2 = \partial w / \partial \bar{z}$ , the two equations (20) can be combined to the one complex equation

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = F\left(z, w, \frac{\partial w}{\partial z}\right). \quad (21)$$

This equation (21) is the desired complex rewriting of the real first order system (19).

**Remark** Consider instead of (19) a system of  $2m$  first order equations for  $2m$  desired real-valued functions  $u_1, v_1, \dots, u_m, v_m$ . Introducing the vector  $w = (w_1, \dots, w_m)$  where  $w_\mu = u_\mu + iv_\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, m$ , such systems can also be written in the form (21), where both the desired  $w$  and the right-hand side  $F$  are vectors having  $m$  complex-valued components.

### 2.3 Distributional solutions of partial complex differential equations. The $T_\Omega$ - and the $\Pi_\Omega$ -operators

The inhomogeneous Cauchy-Riemann equation is the equation

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = h \quad (22)$$

where  $h$  is a given function in a bounded domain  $\Omega$ . In accordance with Section 1.2 a distributional solution of this equation is an integrable function  $w = w(z)$  such that

$$\iint_{\Omega} \left( \varphi h + w \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \right) dx dy = 0$$

for each (continuously differentiable and complex-valued) test function  $\varphi$ . Since  $\frac{1}{\pi} \frac{1}{z - \zeta}$  is a fundamental solution of the Cauchy-Riemann system, Theorem 1 of Section 1.4 shows that the so-called  $T_\Omega$ -operator

$$(T_\Omega h)[z] = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{h(\zeta)}{z - \zeta} d\xi d\eta = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta,$$

(where  $\zeta = \xi + i\eta$ ) defines a (special) distributional solution of the inhomogeneous Cauchy-Riemann equation (22). This statement can be formulated as follows:

**Theorem 3**

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} T_{\Omega} h = h.$$

Denote by  $\Pi_{\Omega}$  the strongly singular operator

$$(\Pi_{\Omega} h)[z] = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta.$$

Then similar considerations lead to the following theorem

**Theorem 4**

$$\frac{\partial}{\partial z} T_{\Omega} h = \Pi_{\Omega} h.$$

**Remark**

The strongly singular integral  $\Pi_{\Omega} h$  is defined as Cauchy's Principal Value provided it exists. Notice that Cauchy's Principal Value of an integral

$$\iint_{\Omega} g d\xi d\eta$$

of a function  $g$  having a strong singularity at  $\zeta$  is defined as limit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\Omega \setminus U_{\varepsilon}(\zeta)} g d\xi d\eta,$$

i.e., one has to omit an  $\varepsilon$ -neighbourhood, not an arbitrary neighbourhood of the singularity. For

$$g(\zeta) = \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$$

one has

$$g(\zeta) = \frac{h(\zeta) - h(z)}{(\zeta - z)^2} + h(z) \cdot \frac{1}{(\zeta - z)^2}. \tag{23}$$

If  $h$  is Hölder continuous with exponent  $\lambda$ ,  $0 < \lambda \leq 1$ , then one has

$$|h(\zeta) - h(z)| \leq H \cdot |\zeta - z|^{\lambda}.$$

Consequently, the absolute value of the first term in (23) can be estimated by

$$\frac{H}{|\zeta - z|^{2-\lambda}}$$

and is thus weakly singular at  $\zeta$ . This implies that the  $\Pi_\Omega$ -operator exists for Hölder continuous integrands. — In order to prove Theorem 4 one has to use the Fubini Theorem for Principal Values of strongly singular integrals.

In order to determine the general solution of the inhomogeneous Cauchy-Riemann equation (22), consider an arbitrary solution  $w = w(z)$  of that equation and define

$$\Phi = w - T_\Omega h.$$

Obviously,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} = 0$$

in the distributional sense, i.e.,

$$\iint_{\Omega} \Phi \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} dx dy = 0 \quad (24)$$

for each test function. Of course, every holomorphic function in the classical sense is a solution of the latter equation. The question is whether this equation (24) can have distributional solutions which are not holomorphic functions in the classical sense. The answer to this question is no in view of the famous Weyl Lemma which will be proved in the next section.

#### 2.4 The Weyl Lemma and its applications to elliptic first order systems in the plane

**Theorem 5** *A distributional solution of the homogeneous Cauchy-Riemann equation is necessarily a holomorphic function in the classical sense, i.e., it is everywhere complex differentiable.*

This statement will be proved by approximating a given distributional solution by classical solutions. For this purpose we need the concept of a mollifier.

Take any real-valued (continuously differentiable) function  $\omega = \omega(\zeta)$  defined in the whole complex plane and satisfying the following conditions:

- $\omega(\zeta) > 0$  if  $|\zeta| < 1$
- $\omega(\zeta) \equiv 0$  if  $|\zeta| \geq 1$
- $\iint \omega(\zeta) d\xi d\eta = 1$

where the integration is to be carried out over the whole complex plane. A special function having these properties is defined by

$$\omega(\zeta) = \begin{cases} c(1 - r^2)^2, & \text{if } r < 1, \\ 0, & \text{if } r \geq 1. \end{cases}$$

where  $r = |\zeta|$  and  $c$  is suitably chosen. For fixedly chosen  $z$  define a further function  $\omega_\delta$  by

$$\omega_\delta(\zeta, z) = \frac{1}{\delta^2} \omega\left(\frac{\zeta - z}{\delta}\right).$$

Then  $\omega_\delta$  is positive in the  $\delta$ -neighbourhood of  $x$ , whereas  $\omega_\delta$  vanishes identically outside this  $\delta$ -neighbourhood. Moreover, one has

$$\iint_{\mathfrak{C}} \omega_\delta(\zeta, z) d\xi d\eta = \iint_{|\zeta - z| \leq \delta} \omega_\delta(\zeta, z) d\xi d\eta = 1. \tag{25}$$

The function  $\omega_\delta$  is called a *mollifier*.

Using the mollifier  $\omega_\delta$ , one defines the regularization  $f_\delta = f_\delta(z)$  of an integrable function  $f = f(z)$  by

$$f_\delta(z) = \iint_{|\zeta - z| \leq \delta} f(\zeta) \omega_\delta(\zeta, z) d\xi d\eta,$$

i.e., the values  $f_\delta(z)$  are the mean values of  $f = f(z)$  with the weight  $\omega_\delta$  in the  $\delta$ -neighbourhood of  $z$ .

In view of (25) the value  $f(z)$  can be rewritten in the form

$$f(z) = \iint_{|\zeta - z| \leq \delta} f(z) \omega_\delta(\zeta, z) d\xi d\eta.$$

Thus one gets

$$f_\delta(z) - f(z) = \iint_{|\zeta - z| \leq \delta} (f(\zeta) - f(z)) \omega_\delta(\zeta, z) d\xi d\eta. \tag{26}$$

Now suppose that  $f = f(z)$  is continuous. Then the supremum

$$\sup_{|\zeta - z| \leq \delta} |f(\zeta) - f(z)|$$

is arbitrarily small in case  $\delta$  is sufficiently small. Moreover, in view of (26) one has

$$\begin{aligned} |f_\delta(z) - f(z)| &\leq \sup_{|\zeta - z| \leq \delta} |f(\zeta) - f(z)| \cdot \iint_{|\zeta - z| \leq \delta} \omega_\delta(\zeta, z) d\xi d\eta \\ &\leq \sup_{|\zeta - z| \leq \delta} |f(\zeta) - f(z)| \end{aligned}$$

where (25) has been applied once more. Thus the  $f_\delta = f_\delta(z)$  tend uniformly to  $f = f(z)$  as  $\delta \rightarrow 0$  provided  $z$  runs in a compact subset of the domain of definition.

**Proof of Weyl's Lemma**

Using chain rule, one has

$$\frac{\partial \omega_\delta}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial \omega_\delta}{\partial \bar{\zeta}}$$

and, consequently,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\delta}{\partial \bar{z}}(z) &= \iint_{|\zeta-z|\leq\delta} f(\zeta) \frac{\partial \omega_\delta}{\partial \bar{z}}(\zeta, z) d\xi d\eta \\ &= -\iint_{|\zeta-z|\leq\delta} f(\zeta) \frac{\partial \omega_\delta}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta, z) d\xi d\eta = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

because  $f = f(z)$  is a distributional solution of the (homogeneous) Cauchy-Riemann system by hypothesis and  $\omega_\delta(\zeta, z)$  is (for each  $z$ ) a special test function.

Formula (27) shows that all of the  $f_\delta = f_\delta(z)$  are solutions of the (homogeneous) Cauchy-Riemann system. On the other hand, the  $f_\delta = f_\delta(z)$  are continuously differentiable because the mollifiers have this property. Thus the  $f_\delta = f_\delta(z)$  are holomorphic functions in the classical sense.

Now consider any compact subset of the domain under consideration. Applying Weierstrass' Convergence Theorem, the function  $f = f(z)$  turns out to be holomorphic, too, as limit of uniformly convergent holomorphic functions. Since the compact subset can be chosen arbitrarily, the function  $f = f(z)$  turns out to be holomorphic everywhere in the domain under consideration. This completes the proof of Weyl's Lemma.

Consider again the non-linear first order system (19) in its complex form (21). Let  $w = w(z)$  be an arbitrary solution in the (bounded) domain  $\Omega$ . Define

$$\Phi = w - T_\Omega F \left( z, w, \frac{\partial w}{\partial z} \right).$$

By virtue of Weyl's Lemma,  $\Phi$  turns out to be a classical holomorphic function. Consequently, each solution  $w = w(z)$  of equation (21) is a fixed point of the operator

$$W = \Phi + T_\Omega F \left( z, w, \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (28)$$

where  $\Phi$  is a suitable chosen holomorphic function. Therefore, boundary value problems for (21) can be reduced to boundary value problems for holomorphic functions. This will be sketched in the next section.

**2.5 Fixed-point methods for linear and non-linear systems in the plane**

In order to construct fixed points of the operator (28), one has to choose a suitable function space in which the  $T_\Omega$ - and the  $\Pi_\Omega$ -operators are bounded. Such spaces are the Hölder spaces or the Lebesgue spaces with  $p > 2$ . While the  $T_\Omega$ -operator is also bounded in the space of continuous functions (the  $T_\Omega$ -operator is even a bounded operator mapping  $L_p(\Omega)$  into  $C^\beta(\Omega)$  with  $\beta = 1 - \frac{2}{p}$ ), the  $\Pi_\Omega$ -operator is not a bounded operator in the space of continuous functions.

In the paper [13], for instance, some boundary value problems for the non-linear system (21) are solved in the following space:

$w$  has to belong to  $C^\beta(\Omega)$ , while  $\partial w/\partial z$  has to be an element of  $L_p(\Omega)$  where  $p$  has to satisfy the inequality

$$2 < p < \frac{1}{1 - \alpha}. \tag{29}$$

The left-hand side of this inequality (29) implies that the  $T_\Omega$ -operator maps  $L_p(\Omega)$  into the Hölder space  $C^\beta(\Omega)$  with

$$\beta = 1 - \frac{2}{p}.$$

Indeed,

$$(T_\Omega)[\zeta_1] - (T_\Omega)[\zeta_2] = -\frac{1}{\pi}(z_1 - z_2) \iint_\Omega h(\zeta) \cdot \frac{1}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)} d\xi d\eta$$

and thus by virtue of Hölder's inequality

$$|(T_\Omega h)[\zeta_1] - (T_\Omega h)[\zeta_2]| \leq \frac{1}{\pi} \cdot |z_1 - z_2| \cdot \|h\|_{L_p(\Omega)} \cdot \left\| \frac{1}{|\zeta - z_1| \cdot |\zeta - z_2|} \right\|_{L_q(\Omega)} \tag{30}$$

where  $p$  and  $q$  are conjugate exponents,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Since

$$\iint_\Omega \frac{1}{|\zeta - z_1|^q \cdot |\zeta - z_2|^q} \leq C_1 |z_1 - z_2|^{2-2q} + C_2 \leq C_3 |z_1 - z_2|^{2-2q}$$

provided  $q > 1$ , the exponent of  $|z_1 - z_2|$  on the right-hand side of (30) is equal to

$$1 + \frac{2 - 2q}{q} = \frac{2}{q} - 1 = 1 - \frac{2}{p}.$$

Consequently,  $T_\Omega h$  turns out to be Hölder continuous with exponent  $\beta$  if  $p > 2$ .

The right-hand side of inequality (29) ensures that the derivative of a holomorphic function belongs to  $L_p(\Omega)$  if the boundary values of the holomorphic function are Hölder-continuous with exponent  $\alpha$ . Further, the right-hand side of (29) is equivalent to

$$\alpha > 1 - \frac{1}{p}$$

and thus we see that  $\beta < \alpha$ .

Since the real part of a holomorphic function is a solution of the Laplace equation, a suitable boundary value problem for holomorphic functions and, therefore, for solutions of (21), too, is the following so-called Dirichlet boundary value problem:

One prescribes the real part of the desired solution on the whole boundary, whereas the imaginary part can be prescribed at one point  $z_0$  only.

In order to solve the boundary value problem for the equation (21), let  $\Psi$  be the holomorphic solution of the boundary value problem under consideration. Further, let  $\Phi_{(w)}$  be a holomorphic function such that

$$\Phi_{(w)} + T_\Omega F\left(z, w, \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

satisfy the homogeneous boundary condition of the given (linear) boundary value problem. While  $\Psi$  depends on the prescribed data only, the holomorphic function  $\Phi_{(w)}$  depends on the choice of  $w$ . Choosing

$$\Phi = \Psi + \Phi_{(w)} \tag{31}$$

in the definition (28) of the corresponding operator, we see that all images  $W$  satisfy the prescribed boundary condition. The same is true for a possibly existing fixed point. Consequently, in order to solve a boundary value problem for the partial complex differential equation (21), one has to find fixed points of the operator (28) where the holomorphic function  $\Phi$  is to be chosen by (31).

The Dirichlet boundary value problem for a desired holomorphic function can always be reduced to the Dirichlet boundary value problem for the Laplace equation. However, there are also other ways for solving this auxiliary problem.

Let  $\Omega$  be the unit disk  $\{z : |z| < 1\}$ , and let  $g$  be a real-valued continuous function defined on the boundary  $|z| = 1$ . Then

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} g(z) \frac{z + \zeta}{z - \zeta} ds + i \cdot C$$

is the most general holomorphic function in  $\Omega$  where  $C$  is an arbitrary real constant and  $ds$  means the arc length element of the boundary  $\partial\Omega$ .

Another useful method for the unit disk is connected with a modified  $T_\Omega$ -operator (see B. Bojarski [6]):

Let  $h$  be defined in  $\Omega$ , and suppose that  $h$  belongs to the underlying function space. Then

$$H = T_\Omega h$$

is continuous in the whole complex plane (and holomorphic outside  $\overline{\Omega}$ ). For points  $z$  on the boundary of  $\Omega$  we have  $\bar{z} = 1/z$  and, therefore,

$$\overline{H(z)} = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{\overline{h(\zeta)}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} d\xi d\eta = \frac{z}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{\overline{h(\zeta)}}{1 - z\bar{\zeta}} d\xi d\eta. \tag{32}$$

On the other hand, the right-hand side of (32) is holomorphic in the unit disk  $\Omega$ . To sum up, the following statement has been proved:

*$\overline{H} = \overline{T_\Omega h}$  is a holomorphic function in  $\Omega$  having the same real part as  $T_\Omega h$  on  $\partial\Omega$ .*

This statement can be used in order to estimate the auxiliary function  $\Phi_{(w)}$  and its derivative  $\Phi'_{(w)}$  provided  $\Omega$  is the unit disk. Details and also the solution of other boundary value problems (such as Riemann-Hilbert's one) for (21) can be found, for instance, in [13].

### 3 Reduction of initial value problems to fixed-point problems

#### 3.1 Related integro-differential operators

Let  $u = u(t, x)$  be the desired function where  $t$  means the time and  $x = (x_1, \dots, x_n)$  is a spacelike variable. Consider an initial value problem of type

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{F}\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) \tag{33}$$

$$u(0, x) = \varphi(x). \tag{34}$$

Then the initial value problem (33), (34) can be rewritten in the integral form<sup>1</sup>

$$u(t, x) = \varphi(x) + \int_0^t \mathcal{F}\left(\tau, x, u(\tau, x), \frac{\partial u}{\partial x_1}(\tau, x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(\tau, x)\right) d\tau. \tag{35}$$

---

<sup>1</sup>M. Nagumo [14] was the first who used such an equivalent integro-differential equation for a functional-analytic proof of the classical Cauchy-Kovalewskaya Theorem.



Since the integrand in (35) contains derivatives of the desired function with respect to spacelike variables, the equation (35) is an integro-differential equation.

In order to construct the solution of the integro-differential equation (35), define the integro-differential operator

$$U(t, x) = \varphi(x) + \int_0^t \mathcal{F} \left( \tau, x, u(\tau, x), \frac{\partial u}{\partial x_1}(\tau, x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(\tau, x) \right) d\tau. \quad (36)$$

Then a fixed-point of this operator is a solution of the integro-differential equation (35) and thus a solution of the initial value problem (33), (34).

### 3.2 Behaviour of derivatives at the boundary. Weighted norms

Suppose the right-hand side of the differential equation (33) does not depend on the derivatives  $\partial u / \partial x_j$ . Suppose, further, that the right-hand side satisfies a Lipschitz condition with respect to  $u$ . Then the operator (36) is contractive provided the time interval is short enough. Since the differentiation is not a bounded operator, this argument is not applicable if the right-hand side  $\mathcal{F}$  depends also of the derivatives (even if a Lipschitz condition is satisfied with respect to the derivatives, too). However, an analogous estimate of the operator (36) will be possible if  $u(t, x)$  belongs to a class of functions for which the unboundedness of the differentiation is moderate in a certain sense. The following easy example will show how such unboundedness can be overcome.

Let  $\Omega$  be the unit disk  $|z| < 1$ . Denote by  $\mathcal{H}(\Omega)$  the set of all holomorphic functions in  $\Omega$ . Choosing  $\frac{\pi}{2} < \arg(z-1) < \frac{3\pi}{2}$ , the function

$$\Phi(z) = (z-1) \log(z-1) = (z-1) \left( \ln |z-1| + i \cdot \arg(z-1) \right)$$

is uniquely defined and belongs to  $\mathcal{H}(\Omega)$ . Defining  $\Phi(1) = 0$ , the function is continuous and thus bounded in the closed unit disk  $|z| \leq 1$ , i.e.,  $\Phi \in \mathcal{H}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ . Moreover,

$$\Phi'(z) = 1 + \log(z-1) \rightarrow \infty \quad \text{as } z \rightarrow 1.$$

Consequently, the complex differentiation  $d/dz$  does not map  $\Phi \in \mathcal{H}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$  into itself and thus the latter space is not suitable for solving the integro-differential equation (35), at least not when using the ordinary supremum norm. On the other hand,

$$(1-z) \cdot \Phi'(z) = (1-z) + (1-z) \log(z-1)$$

is bounded and belongs, therefore, to  $\mathcal{H}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ . Since the distance  $d(z)$  of a point  $z \in \Omega$  from the boundary  $\partial\Omega$  satisfies the estimate

$$d(z) = \inf_{|\zeta|=1} |\zeta - z| \leq |1 - \zeta|$$

it follows that

$$\sup_{\Omega} d(z) |\Phi'(z)|$$

is finite. The last expression, however, is nothing but a weighted supremum norm with the weight  $d(z)$ . Of course, the weighted supremum norm of the function  $\Phi$  itself is also finite. Hence the complex differentiation  $d/dz$  transforms the function  $\Phi$  whose weighted supremum norm is finite in the function  $\Phi'$  having also a finite weighted supremum norm.

Later on we shall see that the integral operator (36) is bounded in a suitably chosen space equipped with a weighted norm. The space consists of functions depending on the time  $t$  and a spacelike variable  $x$  or  $z$ . For fixed  $t$  the elements of the space under consideration have to satisfy a partial differential equation of elliptic type (in particular, they have to be holomorphic or generalized analytic functions).

### 3.3 Weighted norms for time-dependent functions

The following easy example shows that singularities of the initial functions at the boundary can come into the domain in the course of time. This may lead to a reduction of the length of the time interval in which the solution exists.

Let  $\Omega$  be the positive  $x$ -axis. The initial value problem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial u}{\partial x} \\ u(0, x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

has the solution

$$u(x, t) = \frac{1}{x - t}.$$

The initial function has a singularity at the boundary point  $x = 0$  of  $\Omega$ . At the point  $x \in \Omega$  the solution  $u(x, t)$  tends to  $\infty$  as  $t$  tends to  $x$ , i.e., at the point  $x$  the solution exists only in a time interval of length  $x$ . In other words, the shorter the distance of  $x$  from the boundary of  $\Omega$ , the shorter the time interval in which the solution exists.

Now let  $\Omega$  be again an arbitrary bounded domain in  $\mathbf{R}^n$ . In order to measure the distance of a point  $x \in \Omega$  from the boundary  $\partial\Omega$  of  $\Omega$ , introduce an exhaustion of  $\Omega$  by a family of subdomains  $\Omega_s$ ,  $0 < s < s_0$ , satisfying the following conditions:

- If  $0 < s' < s'' < s_0$ , then  $\Omega_{s'}$  is a subdomain of  $\Omega_{s''}$ , and the distance of  $\Omega_{s'}$  from the boundary  $\partial\Omega_{s''}$  of  $\Omega_{s''}$  can be estimated by

$$\text{dist}(\Omega_{s'}, \partial\Omega_{s''}) \geq c_1(s'' - s').$$

where  $c_1$  does not depend on the choice of  $s'$  and  $s''$ .

- To each point  $x \neq x_0$  of  $\Omega$  where  $x_0 \in \Omega$  is fixedly chosen there exists a uniquely determined  $s(x)$  with  $0 < s(x) < s_0$  such that  $x \in \partial\Omega_{s(x)}$ .

Define, finally  $s(x_0) = 0$ . Then  $s_0 - s(x)$  is a measure of the distance of a point  $x$  of  $\Omega$  from the boundary  $\partial\Omega_{s(x)}$ .

Now consider the conical set

$$M = \left\{ (t, x) : x \in \Omega, 0 \leq t < \eta(s_0 - s(x)) \right\}$$

in the  $t, x$ -space. Its height is equal to  $\eta s_0$  where  $\eta$  will be fixed later. The base of  $M$  is the given domain  $\Omega$ , whereas its lateral surface is defined by

$$t = \eta(s_0 - s(x)). \quad (37)$$

The nearer a point  $x$  to the boundary  $\partial\Omega$ , the shorter the corresponding time interval (37). The expression

$$d(t, x) = s_0 - s(x) - \frac{t}{\eta} \quad (38)$$

is positive in  $M$ , while it vanishes identically on the lateral surface of  $M$ . Thus (38) can be interpreted as some pseudo-distance of a point  $(x, t)$  of  $M$  from the lateral surface of  $M$ . Later on this expression will be used as a certain weight for functions  $u = u(x, t)$  defined in  $M$ .

In order to construct a suitable Banach space of functions defined in the conical domain  $M$  in the  $t, x$ -space, let  $\mathcal{B}_s$  be the space of all Hölder continuous functions in  $\Omega_s$  equipped with the Hölder norm

$$\|u\|_s = \max \left( \sup_{\Omega_s} |u|, \sup_{x' \neq x''} \frac{|u(x') - u(x'')|}{|x' - x''|^\lambda} \right), \quad 0 < \lambda \leq 1.$$

For a fixed  $\tilde{t} < \eta s_0$  the intersection of  $M$  with the plane  $t = \tilde{t}$  in the  $t, x$ -space is given by

$$\left\{ (t, x) : t = \tilde{t}, s(x) < \tilde{s} \right\}$$

where

$$\tilde{s} = s_0 - \frac{\tilde{t}}{\eta}. \quad (39)$$

Let  $\mathcal{B}_*(M)$  be the set of all (real-valued) functions  $u = u(t, x)$  satisfying the following conditions:

1.  $u(t, x)$  is continuous in  $M$ .
2.  $u(\tilde{t}, x)$  belongs to  $\mathcal{B}_{s(x)}$  for fixed  $\tilde{t}$  if only  $s(x) < \tilde{s}$  where  $\tilde{s}$  is given by (39).
3. The norm

$$\|u\|_* = \sup_{(t,x) \in M} \|u(t, \cdot)\|_{s(x)} d(t, x) \tag{40}$$

is finite.

The definition (40) of the norm  $\|\cdot\|_*$  implies the estimate

$$\|u(t, \cdot)\|_{s(x)} \leq \frac{\|u\|_*}{d(t, x)} \tag{41}$$

for any point  $(t, x)$  in  $M$ .

**Proposition 1**  $\mathcal{B}_*(M)$  is a Banach space.

**Proof** Note that the inequality  $d(t, x) \geq \delta > 0$  defines a closed subset  $M_\delta$  of the conical domain  $M$ . Each point of  $M$  is contained in such a subset  $M_\delta$  provided  $\delta$  is suitably chosen. For points  $(t, x)$  in  $M_\delta$ , the definition (40) implies the estimate

$$\|u(t, \cdot)\|_{s(x)} \leq \frac{1}{\delta} \|u\|_*$$

Now consider a fundamental sequence  $u_1, u_2, \dots$  with respect to the norm  $\|\cdot\|_*$ . Then one has

$$\|u_n(t, \cdot) - u_m(t, \cdot)\|_{s(x)} \leq \frac{1}{\delta} \cdot \varepsilon \tag{42}$$

for points in  $M_\delta$  provided  $n$  and  $m$  are sufficiently large. This implies also

$$|u_n - u_m| \leq \frac{1}{\delta} \cdot \varepsilon$$

for points in  $M_\delta$ . Consequently, a fundamental sequence converges uniformly in each  $M_\delta$ , i.e., the  $u_n$  have a continuous limit function  $u_*(t, x)$  in  $M$ . Similarly, estimate (42) shows that for  $t = \tilde{t}$  and  $s(x) < \tilde{s}$  the limit function belongs to  $\mathcal{B}_{s(x)}$  because of the completeness of this space. Carrying out the limiting process  $m \rightarrow \infty$  in the inequality  $\|u_n - u_m\|_* < \varepsilon$ , it follows, finally,  $\|u_n - u_*\|_* \leq \varepsilon$  and, therefore,  $\|u_*\|_*$  is finite.

### 3.4 Associated differential operators and consequences of interior estimates

Of course, the operator (36) is defined only for functions  $u = u(t, x)$  for which the first order derivatives  $\partial u / \partial x_j$  exist. Suppose such a function  $u = u(t, x)$  belongs to  $\mathcal{B}_*(M)$  (while the first order derivatives have to belong to the  $\mathcal{B}_{s(x)}$ ). We are going to answer the question under which conditions the image  $U = U(t, x)$  belongs also to  $\mathcal{B}_*(M)$ . Consider again the Banach spaces  $\mathcal{B}(\Omega)$  introduced above.

**Definition** Suppose  $\Omega'$  is any subdomain of  $\Omega''$  having a positive distance  $\text{dist}(\Omega', \partial\Omega'')$  from the boundary of  $\Omega''$ . Then a function  $u \in \mathcal{B}(\Omega'')$  is called a function with a *first order interior estimate* if  $\partial u / \partial x_j$  belongs to  $\mathcal{B}(\Omega')$  and

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{\mathcal{B}(\Omega')} \leq \frac{c_2}{\text{dist}(\Omega', \partial\Omega'')} \|u\|_{\mathcal{B}(\Omega'')} \quad (43)$$

where the constant  $c_2$  depends neither on the special choice of  $u$  nor on the choice of the pair  $\Omega', \Omega''$ .

Applying this estimate to the exhaustion  $\Omega_s$  of  $\Omega$ ,  $0 < s < s_0$ , one gets

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{s'} \leq \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{1}{s'' - s'} \cdot \|u\|_{s''} \quad (44)$$

provided  $s' < s''$ .

Now let  $(t, x)$  be an arbitrary point of  $M$ . Then

$$d(t, x) = s_0 - s(x) - \frac{t}{\eta} > 0.$$

Define

$$\tilde{s} = s(x) + \frac{1}{2}d(t, x)$$

implying

$$\tilde{s} \leq s(x) + \frac{1}{2}(s_0 - s(x)) = \frac{1}{2}s(x) + \frac{1}{2}s_0 < s_0$$

and thus there exists a point  $\tilde{x}$  with  $s(\tilde{x}) = \tilde{s}$ , i.e.,  $\tilde{x} \in \partial\Omega_{\tilde{s}}$ . One has

$$d(t, \tilde{x}) = s_0 - s(\tilde{x}) - \frac{t}{\eta} = \frac{1}{2}d(t, x).$$

Taking into account the estimate (41), the last relation gives

$$\|u(t, \cdot)\|_{\tilde{s}} \leq \frac{\|u\|_*}{d(t, \tilde{x})} = \frac{2\|u\|_*}{d(t, x)}.$$

In view of (44) one gets, therefore,

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{s(x)} \leq \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{1}{\tilde{s} - s(x)} \cdot \|u\|_{\tilde{s}} \leq \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{4}{d^2(t, x)} \cdot \|u\|_*. \quad (45)$$

To be short denote  $\mathcal{F} \left( t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)$  by  $\mathcal{F}u$ , i.e., in particular one has  $\mathcal{F}\Theta = \mathcal{F}(t, x, 0, 0)$ . Next we have to estimate the norm of  $\mathcal{F}u$ . For this purpose we assume that the right-hand side  $\mathcal{F}$  of (33) satisfies the following conditions:

1.  $\mathcal{F}\Theta$  is continuous.
2. The norms  $\|\mathcal{F}\Theta\|_s$  are bounded and thus  $\|\mathcal{F}\Theta\|_*$  is finite.
3.  $\mathcal{F}u$  satisfies the (global) Lipschitz condition

$$\|\mathcal{F}u - \mathcal{F}v\|_s \leq L_0 \|u - v\|_s + \sum_j L_j \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_s. \quad (46)$$

Note that  $\mathcal{F}u = \mathcal{F}\Theta + (\mathcal{F}u - \mathcal{F}\Theta)$ . Using (41) and (45), the Lipschitz condition (46) implies

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}u\|_{s(x)} &\leq \|\mathcal{F}\Theta\|_{s(x)} + L_0 \|u\|_{s(x)} + \sum_j L_j \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{s(x)} \\ &\leq \|\mathcal{F}\Theta\|_* \frac{1}{d(t, x)} + L_0 \|u\|_* \frac{1}{d(t, x)} + \frac{4c_2}{c_1} \sum_j L_j \|u\|_* \frac{1}{d^2(t, x)} \\ &\leq \|\mathcal{F}\Theta\|_* \frac{s_0}{d^2(t, x)} + L_0 \|u\|_* \frac{s_0}{d^2(t, x)} + \frac{4c_2}{c_1} \sum_j L_j \|u\|_* \frac{1}{d^2(t, x)} \end{aligned}$$

since  $d(t, x) \leq s_0$ . The definition (38) of the weight function  $d(t, x)$  implies

$$\int_0^t \frac{1}{d^2(\tau, x)} d\tau < \frac{\eta}{d(t, x)}$$

and thus it follows

$$\left\| \int_0^t \mathcal{F}u \cdot d\tau \right\|_{s(x)} \leq \frac{\eta}{d(t, x)} \left( \|\mathcal{F}\Theta\|_* s_0 + c_3 \|u\|_* \right) \quad (47)$$

where

$$c_3 = s_0 L_0 + \frac{4c_2}{c_1} \sum_j L_j.$$

The estimate (47) of the  $s(x)$ -norm yields

$$\left\| \int_0^t \mathcal{F}u \cdot d\tau \right\|_* \leq \eta \left( \|\mathcal{F}\Theta\|_* s_0 + c_3 \|u\|_* \right).$$

Suppose, finally, that the norms  $\|\varphi\|_s$ ,  $0 < s < s_0$ , are bounded. Then  $\|\varphi\|_*$  is finite, and the following statement for the image  $U(t, x)$  defined by (36) has been proved:

**Proposition 2**

$$\|U\|_* \leq \|\varphi\|_* + \eta \left( \|\mathcal{F}\Theta\|_* s_0 + c_3 \|u\|_* \right).$$

Together with  $u(t, x)$  consider a second element  $v(t, x)$  of  $\mathcal{B}_*(M)$  with the same properties listed above. Let  $V(t, x)$  be the corresponding image defined by an equation analogous to (36). Then

$$U(t, x) - V(t, x) = \int_0^t (\mathcal{F}u - \mathcal{F}v) d\tau.$$

Again in view of (46), (41) and (45), one gets

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}u - \mathcal{F}v\|_{s(x)} &\leq L_0 \|u - v\|_{s(x)} + \sum_j L_j \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{s(x)} \\ &\leq L_0 \|u - v\|_* \frac{1}{d(t, x)} + \frac{4c_2}{c_1} \sum_j L_j \|u - v\|_* \frac{1}{d^2(t, x)} \\ &\leq L_0 \|u - v\|_* \frac{s_0}{d^2(t, x)} + \frac{4c_2}{c_1} \sum_j L_j \|u - v\|_* \frac{1}{d^2(t, x)} \end{aligned}$$

and, consequently,

$$\left\| \int_0^t (\mathcal{F}u - \mathcal{F}v) d\tau \right\|_{s(x)} \leq \frac{\eta}{d(t, x)} c_3 \|u - v\|_*.$$

Thus the following statement has been proved:

**Proposition 3**

$$\|U - V\|_* \leq \eta c_3 \|u - v\|_*.$$

### 3.5 An existence theorem

The Propositions 2 and 3 are true only under the hypothesis that the first order derivatives of  $u(t, x)$  with respect to the spacelike variables  $x_j$  exist (and belong to  $\mathcal{B}_{s(x)}$ ). In addition,  $u(t, x)$  must be a function with a first order interior estimate.

This is not the case for an arbitrary element of  $\mathcal{B}_*(M)$ . In order to apply the above estimations, one has to find a closed subset of  $\mathcal{B}_*(M)$  such that the assumptions mentioned above are true everywhere in this subset. Such a subset can be defined as kernel of an elliptic operator  $\mathcal{G}$ . Define

$$\mathcal{B}_*^{\mathcal{G}}(M) = \left\{ u \in \mathcal{B}_*(M) : \mathcal{G}u(t, \cdot) = 0 \text{ for each fixed } t \right\}.$$

Notice that  $\mathcal{G}$  has to be an elliptic operator whose coefficients do not depend on  $t$ . Condition (43) can be verified using an interior estimate for solutions of elliptic differential equations (see A. Douglis and L. Nirenberg [9] and also S. Agmon, A. Douglis and L. Nirenberg [2]), whereas  $\mathcal{B}_*^{\mathcal{G}}(M)$  is closed in view of a Weierstrass convergence theorem for elliptic equations.

In order to apply the contraction mapping principle, the operator (36) has to map this subspace  $\mathcal{B}_*^{\mathcal{G}}(M)$  into itself.

**Definition** Let  $\mathcal{F}$  be a first order differential operator depending on  $t, x$ ,  $u = u(t, x)$  and on the spacelike first order derivatives  $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ , while  $\mathcal{G}$  is any differential operator with respect to the spacelike variables  $x_j$  whose coefficients do not depend on the time  $t$ . Then  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  is called an *associated pair* if  $\mathcal{F}$  transforms solutions of  $\mathcal{G}u = 0$  into solutions of the same equation for fixedly chosen  $t$ , i.e.,  $\mathcal{G}u = 0$  implies  $\mathcal{G}(\mathcal{F}u) = 0$ .

Note that  $\mathcal{G}$  needs not be of first order [11].

In view of Proposition 3, the corresponding integral operator (36) is contractive in case the height  $\eta_{s_0}$  of the conical domain  $M$  is small enough, and thus the following statement has been proved:

**Theorem 6** *Suppose that  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  is an associated pair. Suppose, further, that the solutions of  $\mathcal{G}u = 0$  satisfy an interior estimate of first order. Then the initial value problem*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \mathcal{F}u \\ u(0, \cdot) &= \varphi \end{aligned}$$

*is solvable provided the initial function  $\varphi$  satisfies the side condition  $\mathcal{G}\varphi = 0$ . Moreover, the solution  $u = u(t, x)$  satisfies the side condition  $\mathcal{G}u(t, \cdot) = 0$  for each  $t$ .*



There are two possibilities for the application of Theorem 6: In case  $\mathcal{F}$  is given, then one has to find an associated  $\mathcal{G}$ . If, however,  $\mathcal{G}$  is given, then one can look for operators  $\mathcal{F}$  such that initial value problems with initial functions  $\varphi$  satisfying  $\mathcal{G}\varphi = 0$  can be solved. Moreover, it is possible that to a given  $\mathcal{F}$  there exist several so-called co-associated [11] operators  $\mathcal{G}$ . This leads to decomposition theorems [10] for the solution of initial value problems.

### 3.6 Conservation laws

Theorem 6 does not only show the existence of a solution  $u = u(t, x)$  of the initial value problem (33), (34), but also it says that the constructed solution satisfies the side condition  $\mathcal{G}u = 0$  for each  $t$ . Thus this side condition  $\mathcal{G}u = 0$  may be interpreted as a conservation law for the evolution equation (33).

### 3.7 The special case of Complex Analysis

Interior estimates for holomorphic functions  $\Phi$  can be obtained from Cauchy's Integral Formula for the derivative  $\Phi'$ . Indeed, let  $\Phi$  be holomorphic in the bounded domain  $\Omega$  and continuous in its closure  $\overline{\Omega}$ . If  $\zeta \in \Omega$  has at least the distance  $\delta$  from the boundary  $\partial\Omega$ , then the Cauchy Integral Formula applied to the disk  $\{z : |z - \zeta| \leq \delta\}$  yields

$$|\Phi'(\zeta)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\delta^2} \cdot \sup_{\Omega} |\Phi| \cdot 2\pi\delta = \frac{1}{\delta} \cdot \|\Phi\|$$

where  $\|\cdot\|$  means the supremum norm. Similar estimates are true for the Hölder norm and the  $L_p$ -norm as well (see [22]).

Interior estimates for generalized analytic functions can be obtained using the  $T_{\Omega}$ - and the  $\Pi_{\Omega}$  operators. Suppose  $w = w(z)$  is a solution of the Vekua equation

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = a(z)w + b(z)\bar{w}.$$

Then in view of Theorem 3 (Section 2.3) and Weyl's Lemma (Section 2.4, Theorem 5) the function

$$\Phi = w - T_{\Omega}(aw + b\bar{w})$$

turns out to be holomorphic. In view of Theorem 4 of Section 2.3, differentiation with respect to  $z$  implies

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \Phi' + \Pi_{\Omega}(aw + b\bar{w}).$$

Since the  $T_{\Omega}$ - and the  $\Pi_{\Omega}$  operators are bounded (cf. Section 2.5), an interior estimate for  $\Phi$  gives thus an interior estimate for generalized analytic functions. Taking into account Theorem 6, in this way initial value problems with generalized analytic functions as initial functions can be solved (see [22]).

### 3.8 The scale method

Initial value problems of type (33), (34) can also be solved using an *abstract Cauchy-Kovalevskaya Theorem* instead of applying the contraction-mapping principle to the Banach space  $\mathcal{B}_*^{\mathcal{G}}(M)$  introduced in Section 3.5. Here one starts from a *scale of Banach spaces*, i.e., one has a family of (abstract) Banach spaces  $\mathcal{B}_s$  with norms  $\|\cdot\|_s$ ,  $0 < s < s_0$ , which are embedded into each other. The latter means that  $\mathcal{B}_s$  is a subspace of  $\mathcal{B}_{s'}$  if  $0 < s' < s < s_0$  where  $\|u\|_{s'} \leq \|u\|_s$ . An example of such a scale is given by the Banach spaces  $\mathcal{B}_s = \mathcal{B}(\Omega_s)$  introduced in Section 3.3 where the  $\Omega_s$  form an exhaustion of a given domain  $\Omega$  in  $\mathbf{R}^n$ . In this case embedding means nothing but the restriction of a function in  $\Omega_s$  to a smaller domain  $\Omega_{s'}$ .

Suppose that for every  $t$  an operator  $\mathcal{F}(t, u)$  is given mapping  $\mathcal{B}_s$  into  $\mathcal{B}_{s'}$  where  $s' < s$ . Suppose, further, that the condition

$$\|\mathcal{F}(t, u) - \mathcal{F}(t, v)\|_{s'} \leq \frac{c \|u - v\|_s}{s - s'}$$

is satisfied with a constant  $c$  not depending on  $t, u, v, s, s'$ . Under this condition the abstract initial value problem

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \mathcal{F}(t, u) \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

is solvable (by successive approximations) in the scale  $\mathcal{B}_s$ ,  $0 < s < s_0$ . In the linear case a proof of the abstract Cauchy-Kovalevskaya Theorem can be found in F. Trèves' book [19], while T.Nishida's paper [16] and L. Nirenberg's book [15] prove non-linear versions. In these publications [19, 15, 16] there are also further references.

In the booklet [22] initial value problems with generalized analytic initial functions are solved using not only the method of weighted norms but also the scale method which is based on the above mentioned abstract Cauchy-Kovalevskaya Theorem.

## 4 Outlook to further generalizations and open problems

### 4.1 Interactions between different generalizations of classical Complex Analysis

There are various generalizations of classical Complex Analysis dealing with several complex variables, monogenic functions and generalized analytic functions.

### Generalized analytic functions

A generalized analytic function is a (complex-valued) solution  $w = w(z)$  of a differential equation of the form

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = F \left( z, w, \frac{\partial w}{\partial z} \right). \quad (48)$$

Important special cases of this equation are

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} &= 0 \quad (\text{Cauchy – Riemann system}) \\ \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} &= a(z)w + b(z)\bar{w} \quad (\text{Vekua equation}) \\ \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} &= q(z)\frac{\partial w}{\partial z}, \quad |q(z)| \leq q_0 < 1 \quad (\text{Beltrami equation}). \end{aligned} \quad (49)$$

If  $w = (w_1, \dots, w_m)$  is a desired vector satisfying an equation (48) with a vector-valued right-hand side, then  $w$  is said to be a *generalized analytic vector*.

### Definition of poly-analytic functions

A complex-valued function  $w = w(z)$  is a *poly-analytic* function if it is a solution of the differential equation

$$\frac{\partial^n w}{\partial \bar{z}^n} = 0, \quad (50)$$

where  $n$  is a natural number, i.e., a poly-analytic function has the form

$$w(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu(z) \bar{z}^\nu$$

where the  $a_\nu(z)$  are holomorphic coefficients.

### Holomorphic functions in several complex variables

A (complex-valued) function depending on  $n \geq 2$  complex variables  $z_1, z_2, \dots, z_n$  is said to be a *holomorphic function in several complex variables* in case the  $n$ -dimensional Cauchy-Riemann system

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

is satisfied.

### Definition of monogenic functions

Consider a Clifford Algebra with the basis

$$e_0 = 1, e_1, \dots, e_n, e_{12}, \dots, e_{12\dots n}$$

over the  $(n + 1)$ -dimensional Euclidian space  $\mathbf{R}^{n+1}$  with the coordinates  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ . Define the  $(n + 1)$ -dimensional Cauchy-Riemann operator  $D$  by

$$D = \sum_{\nu=0}^n e_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}}.$$

Then a Clifford-Algebra-valued function  $u = u(x)$  defined in a domain  $\Omega$  of  $\mathbf{R}^{n+1}$  is called *(left-)monogenic* in  $\Omega$  in case the first order equation

$$Du = 0$$

is satisfied. This equation is a system of  $2^n$  equations for the  $2^n$  real-valued components of  $u$ .

A main feature of present trends in Complex Analysis is the *combination* of methods developed in different branches. For instance, in the theory of multi-monogenic functions one can apply ideas coming from the theory of holomorphic functions in several complex variables such as methods for proving extension theorems.

Recent trends concern the following problems:

- Characterization of the set of all zeros of a solution, including factorization theorems
- Characterization and classification of the singularities of solutions
- Partial complex differential equations with singular coefficients
- Degeneration of the ellipticity, e.g., non-uniformly elliptic equations such as  $\partial w / \partial \bar{z} = (1-z)(\partial w / \partial z)$  and  $\partial w / \partial \bar{z} = |z|(\partial w / \partial z)$  in the unit disk (note that the Beltrami equation  $\partial w / \partial \bar{z} = q(z)(\partial w / \partial z)$  is uniformly elliptic if  $|q(z)| \leq q_0 < 1$ )
- Solution of overdetermined systems

In order to illustrate these tendencies, we consider the following four examples:

**Example 1: A factorization theorem for generalized analytic functions**

A holomorphic functions has *isolated zeros* unless it vanishes identically. The same is also true for solution  $w = w(z)$  of the Vekua equation (49). This statement can be proved easily using the  $T_{\Omega}$ -operator:

Suppose the coefficients  $a(z)$  and  $b(z)$  are continuous. Let  $w = w(z)$  be a continuous solution. Define

$$g = \begin{cases} a + b\frac{\bar{w}}{w} & \text{in case } w \neq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

and

$$h = T_{\Omega}g.$$

Then  $\Phi = w \cdot \exp(-h)$  turns out to be holomorphic because

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \cdot \exp(-h) + w \cdot \exp(-h) \cdot \left(-\frac{\partial h}{\partial \bar{z}}\right) \\ &= \exp(-h) \cdot \left( \left(aw + b\bar{w}\right) - w\left(a + b\frac{\bar{w}}{w}\right) \right) = 0. \end{aligned}$$

To sum up, we have proved the factorization

$$w = \Phi \cdot \exp h \tag{51}$$

of a generalized analytic function  $w$  by a holomorphic factor  $\Phi$  and a (continuous) factor  $\exp h$  which is different from zero everywhere. Consequently, concerning the distribution of the zeros a generalized analytic function behaves like a holomorphic one.

As a by-product of the factorization (51) one gets a modified maximum principle for generalized analytic functions. Note that

$$|w| = |\Phi| \cdot \exp(\operatorname{Re} h).$$

Since  $h$  is bounded, there exist constants  $c_1$  and  $c_2$  such that

$$c_1 \leq \operatorname{Re} h \leq c_2$$

and, therefore,

$$\begin{aligned} |w| &\leq |\Phi| \cdot \exp c_2 \\ |\Phi| &\leq |w| \cdot \exp(-c_1). \end{aligned}$$

Applying the maximum modulus principle for holomorphic functions, it follows

$$\sup_{\Omega} |w| \leq \sup_{\partial\Omega} |w| \cdot \exp(c_2 - c_1).$$

**Example 2: The inhomogeneous Cauchy-Riemann system in several complex variables ( $\bar{\partial}$ -equation)**

In the case of  $n$  complex variables  $z_1, \dots, z_n$  the inhomogeneous Cauchy-Riemann systems reads

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}_j} = h_j, \quad j = 1, \dots, n, \tag{52}$$

where the right-hand sides  $h_j$  are given functions. Suppose the *compatibility conditions*

$$\frac{\partial h_j}{\partial \bar{z}_k} = \frac{\partial h_k}{\partial \bar{z}_j} \tag{53}$$

are satisfied.

Suppose, additionally, that the  $h_j$  are compactly supported. Then we shall show that a solution of (52) is given by the  $T_\Omega$ -operator in one of the  $z_j$ -planes where  $\Omega$  is here the whole  $z_j$ -plane. Choosing  $j = 1$ , we have

$$w(z_1, z_2, \dots, z_n) = -\frac{1}{\pi} \iint \frac{h_1(\zeta_1, z_2, \dots, z_n)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1 d\eta_1 \tag{54}$$

where  $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$ . Indeed, Theorem 3 of Section 2.3 gives  $\partial w / \partial \bar{z}_1 = h_1$ . Further, for  $k \neq 1$  we get

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}_k} = -\frac{1}{\pi} \iint \frac{\partial h_1}{\partial \bar{z}_k}(\zeta_1, z_2, \dots, z_n) \frac{1}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1 d\eta_1. \tag{55}$$

In view of the compatibility conditions,  $\partial h_1 / \partial \bar{z}_k$  can be replaced by  $\partial h_k / \partial \bar{z}_1$ . Since  $h_k$  has a compact support, then formula (7) of Section 1.4 is applicable for the Cauchy-Riemann operator in the  $z_1$ -plane. Consequently, the right-hand side of (55) equals  $h_k$ . This proves formula (54).

The above formula (54) is true if the  $h_j$  are given in the whole of  $\mathbf{C}^n$  and are identically equal to zero outside a bounded set of  $\mathbf{C}^n$ . Next assume that the  $h_k$  are given only in a (bounded) poly-cylinder  $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$  of  $\mathbf{C}^n$ . Suppose, however, that the compatibility conditions (53) are satisfied and, moreover, that the derivatives of the  $h_j$  with respect to different variables  $\bar{z}_k$  exist up to the order  $n - 1$ . Then a special solution of the inhomogeneous Cauchy-Riemann system (52) is given by iterated  $T_{\Omega_j}$ -operators:

$$w = \sum_{\lambda=1}^n (-1)^{\lambda+1} \sum_{j_1, \dots, j_\lambda}^* T_{\Omega_{j_1}} \dots T_{\Omega_{j_\lambda}} h_{j_1 \dots j_\lambda} \tag{56}$$

where the  $h_{j_1 \dots j_\lambda}$  are defined recursively,

$$h_{j_1 \dots j_\lambda k} = \frac{\partial h_{j_1 \dots j_\lambda}}{\partial \bar{z}_k},$$

and  $\sum_{j_1, \dots, j_\lambda}^*$  means summation over combinations of different indices  $j_1, \dots, j_\lambda$ .

We prove formula (56) for the case  $n = 2$  where formula (56) reads

$$w = T_{\Omega_1} h_1 + T_{\Omega_2} h_2 - T_{\Omega_1} T_{\Omega_2} h_{12}.$$

This implies

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}_1} = h_1 + T_{\Omega_2} h_{21} - T_{\Omega_2} h_{12} = h_1.$$

Similarly, we can prove the second equation  $\partial w / \partial \bar{z}_2 = h_2$ . The proof for the general case (56) works in the same way.

Now consider a generalized analytic function in several complex variables which satisfies a system of the form

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}_j} = f_j(z_1, \dots, z_n, w). \quad (57)$$

Under suitable conditions on the right-hand sides one can show that a solution  $w = w(z_1, \dots, z_n)$  can be factorized in the form (51) where  $\Phi$  is now a holomorphic function in  $n$  complex variables  $z_1, \dots, z_n$ . This shows that the set of all zeros is an analytic set in  $\mathbf{C}^n$  provided suitable conditions on the right-hand sides of the system (57) are satisfied (see [20]).

### Example 3: Proof of Hartogs Continuation Theorem via the inhomogeneous Cauchy-Riemann system

The Hartogs Continuation Theorem is the following statement:

*Let  $\Omega$  be a domain in  $\mathbf{C}^n$  with  $n \geq 2$  and  $K$  a compact subset of  $\Omega$  such that  $\Omega \setminus K$  is connected. Then each holomorphic function in  $\Omega \setminus K$  can be extended holomorphically into  $K$ .*

An easy proof of this theorem can be given with the help of the inhomogeneous Cauchy-Riemann equation in several complex variables (see L. Hörmander [12]). For this purpose choose any infinitely differentiable function  $\lambda$  which is identically equal to 1 in a neighbourhood of  $K$ , and which vanishes identically in a neighbourhood of the boundary  $\partial\Omega$  of  $\Omega$ .

Suppose  $h$  is the given holomorphic function in  $\Omega$ . Define  $h_0 = (1 - \lambda)h$ . Then we have  $h_0 \equiv h$  in a neighbourhood of  $\partial\Omega$ , while  $h_0$  vanishes identically in a neighbourhood of  $K$ . Therefore  $h_0$  is defined and infinitely often differentiable everywhere in  $\Omega$  if we define  $h_0 \equiv 0$  in  $K$ .

Now we look for a function  $g$  in  $\Omega$  such that

$$H = h_0 - g$$

is holomorphic everywhere in  $\Omega$ . This is the case if  $g$  satisfies the inhomogeneous Cauchy-Riemann system

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_j} = f_j \tag{58}$$

where

$$f_j = \begin{cases} -h \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{z}_j} & \text{in } \Omega \setminus K \\ 0 & \text{in } K. \end{cases}$$

Since the  $f_j$  vanish identically in a neighbourhood of  $\Omega$ , they are infinitely differentiable in the whole of  $\mathbf{C}^n$  if one defines  $f_j \equiv 0$  outside  $\Omega$ . Moreover, they have compact supports and thus the solution of (58) is given by

$$g(z_1, z_2, \dots, z_n) = -\frac{1}{\pi} \iint \frac{f_1(\zeta_1, z_2, \dots, z_n)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1 d\eta_1$$

where  $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$  (cf. formula (54)). If, for instance,  $|z_2|$  is large enough, then  $f_1$  vanishes identically and thus  $g$  vanishes identically, too. Since there are such points of  $\Omega$  which do not belong to the support of  $g$ , we have

$$H \equiv h_0 \equiv h$$

in an open subset of  $\Omega$ . In view of the Unique Continuation Theorem the functions  $H$  and  $h$  coincide in the whole of  $\Omega \setminus K$ , and  $H$  is the desired holomorphic extension.

**Example 4: The iterated Vekua equation**

Recently a combination of poly-analytic and generalized analytic functions has been investigated by P. Berglez who considered the differential equation

$$D^n w = 0$$

where  $Dw = \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - A(z)w - B(z)\bar{w}$ . Details can be found in P. Berglez' paper [5] in the Proceedings [8] of the Graz Workshop which took place in February 2001.

**4.2 Boundary value problems**

Using complex methods, boundary value problems can be solved not only for first order systems but also for equations and systems of higher order (see the book [31] written by Wen Guo Chun and H. Begehr).

Boundary value problems can also be solved for poly-analytic functions. In other words, these are boundary value problems for the differential equation (50) which is of order  $n$ .



In connexion with the general boundary value problem

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u &= \mathcal{F}(\cdot, u) \quad \text{in } \Omega \\ \mathcal{B}u &= g \quad \text{on } \partial\Omega\end{aligned}$$

(see Theorem 2 in Section 1.6) the following two problems have to be answered:

- Find a fundamental solution of the operator  $\mathcal{L}$ .
- Which boundary value problem is well-posed for  $\mathcal{L}u = 0$ ?

Generally speaking, a well-posed boundary value problem for  $\mathcal{L}u = 0$  is well-posed for  $\mathcal{L}u = \mathcal{F}(\cdot, u)$ , too.

Note, finally, that fundamental solutions can also be used for getting interior estimates (see, for instance, [27]).

### 4.3 Initial value problems

Concerning the application of Complex Analysis to initial value problems, mainly the following questions are to be answered:

- Proof of interior estimates, especially it is to be investigated how the constant in the estimate depends on the distance of a compact subset from the distance from the boundary.
- Construction of associated differential operators. Example: Which differential operators map monogenic functions into themselves? Note that associated spaces in connexion with initial value problems lead to *conservation laws*.
- Formulation and proof of uniqueness theorems for general initial value problems (generalized Holmgren type theorems).
- Investigation of the behaviour of the integral operators of Complex Analysis in weighted function spaces.

### 4.4 A unified approach to Mathematical Analysis

Calculus should be taught within the framework of Banach spaces (simultaneous investigation of real-valued functions of one real variable, systems of real-valued functions depending on several real variables, complex-valued functions of one complex variable, mappings between Banach spaces such as integral operators mapping the space of continuous functions into itself).

Of course, concerning Complex Analysis, Generalized Analytic Functions cannot be a subject compulsory of all students of Mathematics. However, the spirit of that theory should be used when teaching Complex Analysis. That means, especially,

- Complex differentiation has to be introduced in the framework of partial complex differentiation.
- Instead of starting from the classical Cauchy Integral Formula, the starting point should be the generalized Cauchy Integral Formula

$$w(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{w(z)}{z - \zeta} dz - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}(z) \frac{1}{z - \zeta} dx dy$$

(Cauchy-Pompeiu Integral Representation, see Section 2, formula (18)).

- Weak (distributional) derivatives in connexion with the concept of distributional solutions of Partial Differential Equations should be compulsory for each student of Mathematics.

As far as possible, existence theorems should be proved using methods of high generality such as the contraction-mapping principle. E.g., in analogy to the integral rewriting of ordinary differential equations, partial differential equations with a linear elliptic principal part should be reduced to fixed-point problems in suitable function spaces (example: W. Walter's proof [30] of the Cauchy-Kovalevskaya Theorem by the contraction-mapping principle).

## References

- [1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*. Academic Press 1975.
- [2] S. Agmon, A. Douglis, and L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I and II*. Comm. Pure Appl. Math., vol. 12, 623-727, 1959, and vol. 17, 35-92, 1964.
- [3] M. B. Balk, *Polyanalytic functions*. Akademie-Verlag, Berlin 1991.
- [4] H. Begehr, O. Çelebi and W. Tutschke (eds), *Complex methods for Partial Differential Equations*. Kluwer Academic Publishers, Isaac series, vol. 6, 1999.
- [5] P. Berglez, *On the solutions of the iterated Bers-Vekua equation*. Contained in [8], pp. 266-275.
- [6] B. Bojarski, *Generalized solutions of elliptic first order systems with discontinuous coefficients* (in Russian). Mat. Sbornik vol. 43 (85), No. 4, pp.451-503, 1957.
- [7] F. Brackx, R. Delanghe and F. Sommen, *Clifford Analysis*. Pitman 1982.
- [8] H. Florian, N. Ortner, F. J. Schnitzer and W. Tutschke (eds.), *Functional-analytic and complex methods, their interactions, and applications to Partial Differential Equations*. Proceedings of the Workshop held at Graz University of Technology, February 12-16, 2001. World Scientific Publishing Company 2001.
- [9] A. Douglis and L. Nirenberg, *Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations*. Comm. pure appl. Math., vol. VIII, 503-538, 1955.

- 
- [10] R. Heersink and W. Tutschke, *A Decomposition Theorem for Solving Initial Value Problems in Associated Spaces*. Rendic. Circ. Matem. Palermo, Serie II, vol. XLIII, pp. 419-434, 1994.
- [11] —, *On Associated and Co-associated Complex Differential Operators*. Journ. Analys. Appl., vol. 14, pp.249-257, 1995.
- [12] L. Hörmander, *An Introduction to Complex analysis in Several Variables*. North-Holland Publishing Company, 3<sup>rd</sup> ed. 1990.
- [13] G. F. Manjavidze and W. Tutschke, *On some boundary value problems for non-linear first order systems in the plane* (in Russian). Contained in "Boundary value problems in the theory of generalized analytic functions and their applications". Trudy Inst. Appl. Mathem. of University Tbilisi, pp. 79-128, Tbilisi 1983.
- [14] M. Nagumo, *Über das Anfangswertproblem partieller Differentialgleichungen*. Japan. Journ. Math., vol. 18, 41-47, 1941.
- [15] L. Nirenberg, *Topics in nonlinear Functional Analysis*. New York 1974. Russian transl.: Moscow 1977.
- [16] T. Nishida, *A note on Nirenberg's theorem as an abstract form of the non-linear Cauchy-Kovalewski theorem in a scale of Banach spaces*. Journ. Diff. Geom., vol. 12, 629-633, 1977.
- [17] F. Rihawi, *Comparison of fixed-points methods for plane boundary value problems of quasilinear first order systems* (in German). Grazer Math. Ber. 317, pp. 1-26, 1992.
- [18] —, *Remarks on the solvability of Dirichlet problems in different function spaces*. Contained in [4], pp.289-293.
- [19] F. Trèves, *Basic linear differential operators*. New York / San Francisco / London, 1975.
- [20] —, *Partial Complex Differential Equations in One and in Several Complex Variables* (in German). Berlin 1977.
- [21] —, *Partial Differential Equations. Classical, functional-analytic and complex methods* (in German). Teubner Leipzig 1983.
- [22] —, *Solution of initial value problems in classes of generalized analytic functions*. Teubner Leipzig and Springer-Verlag 1989.
- [23] —, *Inhomogeneous equations in Complex Analysis. Functional-analytic methods of Complex Analysis in the complex plane and in higher dimensions*. Textos de Matemática. Série B, Coimbra. 41 pp. 1995.
- [24] —, *Complex methods in the theory of initial value problems*. Contained in [4], pp. 295-311.
- [25] —, *The method of weighted function spaces for solving initial value and boundary value problems*. Contained in [8], pp. 75-90.
- [26] —, *Generalized Analytic Functions and their contributions to the development of Mathematical Analysis*. Proceedings of the Hanoi Conference on "Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and applications to partial differential equations" (in preparation).

- 
- [27] W. Tutschke and U. Yüksel, *Interior  $L_p$ -Estimates for Functions with Integral Representations*. Appl. Anal., vol. 73, pp. 281-294, 1999.
- [28] C. J. Vanegas, *Nonlinear perturbations of systems of partial differential equations with constant coefficients*. Electronic Journal of Differential Equations, vol. 2000, No. 05, pp. 1-10, 2000.
- [29] I. N. Vekua, *Generalized analytic functions*. Engl. transl. Pergamon Press 1962. 2nd edit. Moscow 1988 (in Russ.).
- [30] W. Walter, *An elementary proof of the Cauchy-Kowalevsky theorem*. Amer. Math. Monthly, vol. 92, 115-125, 1985.
- [31] Wen Guo Chun and H. Begehr, *Boundary Value Problems for Elliptic Equations and Systems*. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, vol. 46, 1990.

## Works consulted

While references to special research papers are given at corresponding places, trend-setting monographs whose results are used at various places throughout the present report will be listed in the sequel:

Theory and applications of generalized analytic functions can be found in I. N. Vekua's book [29]. Complex methods for non-linear systems are discussed in the booklet [21]. M. B. Balk's book [3] deals with polyanalytic functions. An approach to holomorphic functions in several complex variables making use of the inhomogeneous Cauchy-Riemann equation is given in L. Hörmander's book [12]. Monogenic functions are discussed in F. Brackx', R. Delanghe's and F. Sommen's Research Notes [7]. Mollifiers (which are in use in order to approximate weak solutions by smooth functions) are introduced in R. A. Adam's monograph [1].

WOLFGANG TUTSCHKE  
GRAZ UNIVERSITY OF TECHNOLOGY  
AUSTRIA

# El Proceso de Wiener y el Teorema del Límite Central.

E. M. Cabaña

## Resumen

El proceso de Wiener permite dar una demostración del Teorema del Límite Central mucho más probabilística que las habituales, que se basan fuertemente en la utilización de la transformada de Fourier o en otros argumentos de carácter analítico.

Con el mismo esfuerzo, se obtiene como resultado un TLC funcional, y con poco esfuerzo más, la convergencia en distribución del *proceso empírico al puente browniano*.

Estas notas describen el contenido de una charla que tuvo lugar en la Universidad de Oriente, en el marco de los Terceros Talleres de Formación Matemática que se desarrollaron en Cumaná, Venezuela, entre el 29 de julio y el 2 de agosto de 2002.

En ella hemos intentado mostrar esta aplicación del proceso de Wiener, sin detallar los aspectos de carácter técnico, a un público con cierta familiaridad con el cálculo de probabilidades, como la que se alcanzaría luego de, al menos, un curso en el que se estudien el cálculo de esperanzas y la convergencia en probabilidad.

## 1 Introducción.

En los albores del análisis matemático, causó sensación un ejemplo de función continua pero no diferenciable en ningún punto, ideado por Weierstrass.

A comienzos del siglo pasado, Albert Einstein propuso un modelo matemático para el movimiento errático de las partículas suspendidas en un ambiente de agitación térmica descubierto por el botánico Robert Brown en 1827. Ese modelo, que después adoptó el nombre de Proceso de Wiener es válido, según lo señaló el propio Einstein, para medios de viscosidad infinita, y ha sido reemplazado por modelos más adecuados, en lo que se refiere a la representación del *Movimiento Browniano*. Sin embargo, el proceso de Wiener ha resultado ser un modelo extremadamente útil para el desarrollo de la probabilidad en particular y del análisis matemático en general. Las trayectorias del proceso de Wiener no son diferenciables en ningún punto, casi seguramente, al igual que el ejemplo de Weierstrass.

En esta presentación vamos a vincular al proceso de Wiener con el Teorema del Límite Central, un teorema clásico en la teoría de la probabilidad, cuyas primeras formulaciones se remontan a Gauss, Laplace, de Moivre. Utilizaremos para ello la Ley de los Grandes Números. Un enunciado sencillo del TLC es el siguiente:

**Teorema 1.1** *Si  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  son variables i.i.d. con esperanza  $\mu$  y variancia  $\sigma^2$ , entonces la sucesión  $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu}{\sigma}$  converge en distribución a la normal típica.*

La distribución normal típica es la que tiene por densidad  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$  y por lo tanto, si  $Z$  tiene distribución normal típica,  $\Phi(Z) = \mathbf{P}\{Z \leq x\} = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$ .

**Teorema 1.2** *(Ley de los Grandes Números) Si  $X_1, X_2, \dots$  son variables i.i.d. con esperanza  $\mu, |\mu| < \infty$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \mu$  c.s. Además,  $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[nt]} X_i - \mu t \right| = 0$ .*

Una variable  $Y = a + bZ$  tiene distribución normal cuando se obtiene de una variable normal típica  $Z$  por un cambio de posición y/o escala, de modo que el TLC tiene como consecuencia inmediata que las sumas de variables independientes equidistribuidas poseen una distribución *aproximadamente* normal.

Volvamos al proceso de Wiener: los choques de las partículas invisibles del fluido, que rodean a la partícula visible al microscopio que estamos observando, le producen movimientos erráticos, de modo que si  $w(t)$  es la abscisa en un eje determinado de la posición de la partícula, a partir de su posición inicial, los incrementos  $w(t + \delta) - w(t)$  son producto exclusivo de los choques recibidos en  $(t, t + \delta)$  debido a la suposición de que la viscosidad es infinita, por lo que la velocidad inicial no hace diferencias en el incremento resultante.

“One of the chief duties of the mathematician in acting as an advisor to scientists is to discourage them from expecting too much from mathematics”



Wiener, Norbert (1894-1964).

Nació en Columbia, Missouri (U.S.A) el 26 de noviembre de 1894, obtuvo su doctorado en Harvard a los 18 años, y luego estudió en Cambridge, Inglaterra, con Russell, y en Göttingen, Alemania, con Hilbert. También recibió la influencia de Hardy.

En 1933 ganó el Premio Bócher por su trabajo sobre análisis armónico generalizado y teoremas Tauberianos.

Aunque fue más conocido por el desarrollo de la *cibernética*, sus intereses fueron extraordinariamente amplios, y también contribuyó a muchas otras áreas de estudio, entre ellas, la de los procesos aleatorios. En este último tema, es particularmente interesante su aporte a la construcción de una teoría matemática del movimiento browniano.

Contribuyó al desarrollo del Departamento de Matemática del Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT), en el que enseñó entre 1919 y 1960. Murió el 18 de marzo de 1964 en Estocolmo, Suecia.

Cuando suponemos que las condiciones del movimiento no cambian con el tiempo, encontramos que los sucesivos incrementos  $w(n\delta) - w((n-1)\delta)$  son independientes, equidistribuidos, para cualquier  $\delta$ , y la coherencia con el TLC nos lleva a concluir que, en ausencia de deriva, es razonable admitir que, luego de una normalización,  $w$  debe poseer las siguientes propiedades:

- La familia de variables aleatorias  $\{w(t) : t \geq 0\}$  es gaussiana.
- Los incrementos de  $w$  son independientes.
- $\mathbf{E}w(t) = 0$ ,  $\mathbf{E}w(s)w(t) = s \wedge t$  para cualesquiera  $s, t$ .
- Las trayectorias  $t \rightarrow w(t)$  son continuas.

**Definición 1.1** *Las propiedades precedentes definen (de manera redundante) al proceso de Wiener típico.*


## 2 Algunas propiedades del proceso de Wiener

**Teorema 2.1** *Si  $w$  es un proceso de Wiener,  $\sqrt{h}w(t/h)$  es un nuevo proceso de Wiener.*

**Teorema 2.2** *La distribución condicional de  $w(t) : t_1 \leq t \leq t_2$  dados  $w(t) : t \leq t_1$  y  $w(t) : t \geq t_2$  es la de la suma de la cuerda que une  $(t_1, w(t_1))$ ,  $(t_2, w(t_2))$  y un proceso independiente de las condiciones dadas que llamaremos  $b(t) : t_1 \leq t \leq t_2$ , con las propiedades:*

*$b(t) : t_1 \leq t \leq t_2$  es una familia gaussiana, centrada para  $t_1 \leq s \leq t \leq t_2$ ,  $\mathbf{E}b(s)b(t) = (s - t_1)(t_2 - t)/(t_2 - t_1)$*

Al proceso  $b$  se lo llama Puente Browniano asociado al intervalo  $(t_1, t_2)$ . Al puente browniano asociado al intervalo  $(0, 1)$  se lo llama Puente Browniano Típico.

	<p>Nació en París, el 15 de septiembre de 1886. Fue alumno de Volterra. En 1910 ingresó como profesor a la École des Mines de París, y desde 1913 hasta 1959 fue profesor de la École Polytechnique de la misma ciudad.</p> <p>Sus principales aportes a la matemática fueron en las áreas de la probabilidad, el análisis funcional, las ecuaciones en derivadas parciales y también las series y la geometría.</p> <p>Sus principales libros son <i>Leçons d'analyse fonctionnelle</i> (1922), <i>Calcul des probabilités</i> (1925), <i>Théorie de l'addition des variables aléatoires</i> (1937-54), y <i>Processus stochastiques et mouvement brownien</i> (1948).</p> <p style="text-align: center; font-weight: bold;">Paul P. Lévy (1886 - 1971).</p>
---	---

**Corolario 2.2.1** *Una construcción explícita del Proceso de Wiener en  $(0, 1)$  puede hacerse eligiendo  $w(0) = 0$ ,  $w(1)$  igual a una variable normal típica  $Z_1$ , y sumando a la correspondiente cuerda un puente  $b$  asociado al intervalo  $(0, 1)$ . Para ello, podemos limitarnos a agregar a la cuerda en su punto medio  $(1/2, w(1)/2)$  una variable aleatoria independiente con la distribución de  $b(1/2)$ , a saber,  $Z_{1/2}/2$ , donde  $Z_{1/2}$  es normal típica independiente de  $Z_1$ . A esta variable que agregamos, podríamos denominarla flecha correspondiente al intervalo  $(0, 1)$ .*

*Conseguimos de esta manera construir  $w$  en los puntos  $0, 1/2, 1$ . En cada uno de los intervalos  $(0, 1/2)$  y  $(1/2, 1)$  agregamos las correspondientes flechas y esto nos construye  $w$  en todos los puntos  $i/4$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ . Por sucesivas subdivisiones se obtienen, uniendo los puntos ya obtenidos mediante las correspondientes cuerdas, poligonales que convergen uniformemente c.s. a un límite que es el proceso de Wiener.*

Introducimos las notaciones  $D_0 = \{1\}$ ,  $D_n = \{k/2^n : k = 1, 3, 5, \dots, 2^n - 1\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) y  $D = \bigcup D_n$ . Llamamos racionales diádicos del intervalo  $(0, 1]$  a los puntos de  $D$ , y racionales diádicos de índice  $n$  a los de  $D_n$ .

A cada racional en  $D$  vamos a asociar una función de la manera siguiente. Al 1 le asociamos  $H_1(t) = 1$  ( $0 < t \leq 1$ ) y a cualquier  $r$  en  $D_n$ ,  $n \geq 1$ ,

$$H_r(t) = 2^{(n-1)/2} \text{sgn}(r-t) \mathbf{1}_{\{|r-t| < 2^{-n}\}}.$$

Esta familia de funciones recibe el nombre de *funciones de Haar*, y es un sistema ortonormal completo en  $L^2(0, 1)$ .

A las integrales

$$S_r(T) = \int_0^T H_r(t) dt = \int_0^1 \mathbf{1}_{\{t < T\}} H_r(t) dt$$

de las funciones de Haar, se las llama *funciones de Schauder*. Dado que las funciones de Schauder son coeficientes de Fourier de funciones indicatrices de intervalos, la igualdad de Parseval expresada, aplicada a este caso, que

$$s \wedge t = \int_0^1 \mathbf{1}_{\{\tau < s\}} \mathbf{1}_{\{\tau < t\}} d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r \in D_n} S_r(s) S_r(t). \quad (1)$$

La Figura 1 indica la forma de las funciones de Haar y de Schauder, para  $r$  de índice mayor que 0.

**Teorema 2.3** (*Construcción del proceso de Wiener de Lévy-Ciesielski*):

*La serie  $w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r \in D_n} Z_r S_r(t)$ , en la que  $\{Z_r : r \in D\}$  es una familia de variables aleatorias independientes, con distribución gaussiana típica, converge uniformemente en  $0 \leq t \leq 1$  con probabilidad uno, y la suma es un proceso de Wiener.*



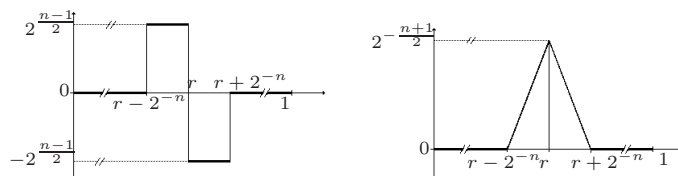


Figure 1: Gráficos de las funciones de Haar  $H_r$  y de Schauder  $S_r$ .

Es inmediato verificar que los incrementos  $v(t) = w(T + t) - w(T)$  a partir de un tiempo determinístico  $T$ , tienen la distribución de un nuevo proceso de Wiener independiente de la trayectoria  $\{w(s) : s \leq T\}$ .

**Teorema 2.4** *Cuando  $T$  es el primer instante en que  $w$  alcanza alguno de los niveles  $-a, b$ , donde  $a, b$  son dos números positivos cualesquiera, los incrementos  $v(t) = w(T+t) - w(T)$  a partir de  $T$ , tienen la distribución de un nuevo proceso de Wiener, independiente de la trayectoria  $\{w(s) : s \leq T\}$ .*

*La probabilidad de que alguno de los niveles se alcance es 1, y la esperanza de  $T$  es  $ab$ . La probabilidad de que el primer nivel alcanzado sea  $-a$  es  $b/(a+b)$  y la de que el primero sea  $b$  es su complemento  $a/(a+b)$ .*

### 3 Inmersión de un paseo al azar en $w$

Observemos el primer instante  $T_1$  en el que  $|w_1|$  alcanza el valor 1. La variable aleatoria  $w_1(T_1)$  vale 1 o  $-1$  con probabilidades  $1/2, 1/2$ . Observamos luego el incremento  $w_2(t) = w_1(T_1 + t) - w_1(T_1)$  y el primer instante  $T_2$  en el que  $|w_2|$  alcanza el valor 1, y luego, sucesivamente, el primer instante  $T_n$  en que  $w_n(t) = w_{n-1}(T_{n-1} + t) - w_{n-1}(T_{n-1})$  alcanza en valor absoluto el valor 1. Como consecuencia, las variables  $X_n = w_n(T_n)$  son independientes con la distribución de los sumandos de un paseo al azar simétrico simple, y  $(w_1(\sum_{i=1}^{[nt]} T_i))_{0 \leq t \leq 1} \sim (s_n(t) = \sum_{i=1}^{[nt]} X_i)_{0 \leq t \leq 1}$ . Para cada  $n$ , elegimos en lugar de  $w_1$  el proceso  $v_n(t) = \sqrt{n}w(t/n)$ , y entonces  $w(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[nt]} T_i) \sim s_n(t)$ .

La esperanza común de los tiempos  $T_i$  es 1, de manera que

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[nt]} T_i - t \right| = 0,$$

y la continuidad de las trayectorias de  $w$  permite concluir que

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq 1} |w(t) - s_n(t)| = 0. \tag{2}$$

#### 4 Un TLC funcional.

La inmersión de las sumas parciales de variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots$  i.i.d. con  $\mathbf{E}X_1 = 0$ ,  $\mathbf{Var}X_1 = 1$  en un proceso de Wiener permite deducir que (2) vale para  $s_n(t) = \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_i$ . La inmersión se basa en el siguiente procedimiento<sup>1</sup>:

**Teorema 4.1** *Existen funciones crecientes no negativas  $a, b : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^+$  tales que, cuando  $U$  es uniforme en  $(0, 1)$ , y  $T$  es el tiempo de llegada del proceso de Wiener  $w$  a los niveles  $-a(U), b(U)$ , entonces  $w(T) \sim X_1$  y  $\mathbf{E}T = 1$ .*

Para demostrar la proposición precedente, basta imponer las condiciones requeridas para que valga el resultado, y lo que se obtiene es un sistema de ecuaciones diferenciales que admite solución. En general, esta solución no puede obtenerse mediante una fórmula cerrada.

Para determinar  $a, b$ , notamos en primer lugar que la distribución condicional de  $w(T)$  dada  $U$  es  $-a(U)$  con probabilidad  $b(U)/(a(U) + b(U))$  y  $b(U)$  con probabilidad  $a(U)/(a(U) + b(U))$ .

Como consecuencia de suponer que  $a$  y  $b$  son monótonas no decrecientes,

$$1 - F(b_0) = \mathbf{P}\{w(t) > b_0\} = \int_{\{u: b(u) > b_0\}} \frac{a(u)}{a(u) + b(u)} du,$$

$$F(-a_0) = \mathbf{P}\{w(t) \leq -a_0\} = \int_{\{u: a(u) \geq a_0\}} \frac{b(u)}{a(u) + b(u)} du.$$

Si  $b_0 = b(u_0)$ ,  $a_0 = a(u_0)$ ,

$$\alpha(u) = F(-a(u)), \quad \beta(u) = F(b(u)), \quad (3)$$

entonces  $1 - \beta(u_0) = \int_{\{u: u > u_0\}} \frac{a(u)}{a(u) + b(u)} du$ ,  $\alpha(u_0) = \int_{\{u: u \geq u_0\}} \frac{b(u)}{a(u) + b(u)} du$ , y luego de derivar respecto de  $u_0$  obtenemos

$$\frac{d\beta(u)}{du} = \frac{a(u)}{a(u) + b(u)}, \quad \frac{d\alpha(u)}{du} = -\frac{b(u)}{a(u) + b(u)}. \quad (4)$$

Las cuatro ecuaciones (3), (4) permiten encontrar las cuatro funciones  $a, b, \alpha, \beta$ .

La esperanza de la distribución  $F$  es

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} t dF(t) &= \int_0^1 [b(u) dF(b(u)) + a(u) dF(-a(u))] = \int_0^1 [b(u) d\beta(u) + a(u) d\alpha(u)] \\ &= \int_0^1 \left[ b(u) \frac{a(u)}{a(u) + b(u)} - a(u) \frac{b(u)}{a(u) + b(u)} \right] du = 0, \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Descripciones algo menos elementales de este proceso pueden encontrarse en [2] y en [6]

de modo que la suposición de que la esperanza es nula es necesaria para posibilitar la construcción.

La hipótesis de que la variancia es 1 implica:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 dF(t) = \int_0^1 [b^2(u)d\beta(u) + a^2(u)d\alpha(u)] = \int_0^1 a(u)b(u)du. \quad (5)$$

**Ejemplo 4.1** Cuando  $F(x) = e^{x-1}$ ,  $-\infty < x \leq 1$ , encontrar las funciones  $a, b, \alpha, \beta$ .

Las ecuaciones son

$$\alpha(u) = e^{-a(u)-1}, \beta(u) = e^{b(u)-1}, \quad (6)$$

$$b'(u)e^{b(u)-1} = \frac{a(u)}{a(u) + b(u)}, a'(u)e^{-a(u)-1} = \frac{b(u)}{a(u) + b(u)}. \quad (7)$$

De (6) se obtendrán  $\alpha$  y  $\beta$ .

De (7) se llega a  $\frac{db}{da}e^{a+b} = \frac{a}{b}$ , o bien  $be^b db = ae^{-a} da$ , ecuación de variables separables que, integrada, conduce a

$$(1 - b)e^b = (1 + a)e^{-a}. \quad (8)$$

El primer miembro decrece monótonamente de 1 a 0 cuando  $b$  recorre el intervalo  $[0, 1]$ , y el segundo miembro también decrece monótonamente de 1 a 0 cuando  $a$  recorre la semirrecta  $[0, +\infty)$ . Esto implica que ambas correspondencias se pueden invertir. Denotaremos  $\tilde{a}(y)$  y  $\tilde{b}(y)$  a las funciones inversas.

De las dos últimas ecuaciones se obtiene también  $e^b db + e^{-a} da = edu$ , que, integrada, proporciona

$$u = \frac{1}{e}[e^b - e^{-a}]. \quad (9)$$

Esta ecuación nos permite observar en particular que cuando  $a$  recorre  $[0, +\infty)$  y  $b$  recorre correlativamente  $[0, 1]$ , entonces  $u$  recorre  $[0, 1]$ .

Para obtener las funciones  $a(u)$  y  $b(u)$ , calculamos  $\tilde{u}(y) = \frac{1}{e}[e^{\tilde{b}(y)} - e^{-\tilde{a}(y)}]$ , invertimos la correspondencia  $y \mapsto \tilde{u}(y)$  (llamamos  $\tilde{y}(u)$  a la correspondencia inversa) y entonces  $a(u) = \tilde{a}(\tilde{y}(u))$ ,  $b(u) = \tilde{b}(\tilde{y}(u))$ .

Si bien las ecuaciones (8) y (9) que vinculan  $a, b$  con  $u$  no nos proporcionan una fórmula cerrada que describa las funciones  $u \mapsto a$  o  $u \mapsto b$ , la evaluación numérica de las funciones inversas descritas en el contexto precedente nos permite un cálculo aproximado de ambas funciones.

La Figura 2 representa las funciones  $-a(u), b(u)$  en un mismo diagrama.

Observemos como complemento de lo anterior, que la esperanza condicional de  $T$  dado  $U$  es

$$\mathbf{E}(T | U) = \mathbf{E}(w^2(T) | U) = b^2(U) \frac{a(U)}{a(U) + b(U)} + a^2(U) \frac{b(U)}{a(U) + b(U)} = a(U)b(U),$$

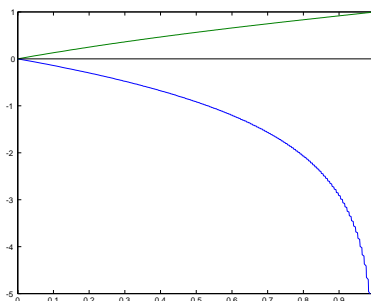


Figure 2: Representaciones gráficas de las funciones  $a, b$ .

de manera que podemos concluir que  $\mathbf{E}T = \mathbf{E}(a(U)b(U))$ . La ecuación (5) muestra que  $\mathbf{E}(T) = 1$ .

## 5 La convergencia del proceso empírico al puente browniano

Se denomina función de distribución empírica de una muestra aleatoria simple  $X_1, \dots, X_n$  de la distribución  $F$  a  $F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i \leq t\}}$ . Una consecuencia bastante directa de la Ley de los Grandes Números muestra que en cualquier intervalo de continuidad  $I$  de  $F$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in I} |F_n(t) - F(t)| = 0$  (esta propiedad se conoce como *Ley de Glivenko - Cantelli*).

La función aleatoria  $b_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - F(t)) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n b_{X_i}(t)$ , donde  $b_{X_i}(t) = \mathbf{1}_{\{X_i \leq t\}} - F(t)$ , se denomina *proceso empírico*, y su distribución límite es la de un puente browniano  $b(F(t))$  cuando  $F$  es continua. Basta verificarlo cuando  $F$  es la identidad, es decir, cuando  $X_1, \dots, X_n$  es una muestra de la distribución uniforme en  $(0, 1)$ .

Vamos a verificar que en ese caso, existen copias  $b_n^*(t)$  de  $b_n(t)$  y un puente browniano típico  $b$  tales que  $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq u \leq 1} |b_n^*(t) - b(t)| = 0$ .

**Lema 5.1** *La transformación  $\mathcal{Q}$  que a cada función  $g$  seccionalmente continua en  $[0, 1]$ , con límite en 1 por la izquierda, asocia*

$$(\mathcal{Q}g)(t) = g(t) - (1-t) \int_0^t \frac{g(u)}{(1-u)^2} du, \quad (10)$$

*tiene por recorrido las funciones  $h$  seccionalmente continuas en  $[0, 1]$  con límite por la izquierda en 1 igual a 0. Su inversa es*

$$(\mathcal{Q}^{-1}h)(t) = h(t) + \int_0^t \frac{h(u)}{1-u} du. \quad (11)$$

$\mathcal{Q}$  tiene la propiedad de continuidad

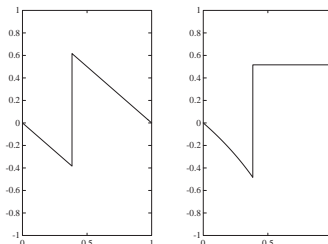


Figure 3: Proceso empírico y proceso empírico transformado para una muestra uniforme de tamaño 1.

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} (\mathcal{Q}g)(t) \leq 2 \sup_{0 \leq t \leq 1} g(t),$$

y aplica un proceso de Wiener  $w$  en un puente browniano  $b = \mathcal{Q}w$ .

La continuidad es consecuencia de la acotación válida para cualquier  $t$

$$|(\mathcal{Q}g)(t)| \leq \|g\|_\infty + (1-t) \int_0^t \frac{\|g\|_\infty}{(1-u)^2} du = (1+t)\|g\|_\infty \leq 2\|g\|_\infty.$$

**Definición 5.1** Llamamos proceso empírico transformado<sup>2</sup> de una muestra aleatoria simple  $U_1, \dots, U_n$  de la distribución uniforme en  $[0, 1]$ , al resultado de aplicar la transformación  $\mathcal{Q}^{-1}$  del Lema 5.1 al proceso empírico ordinario  $b_n(u) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n b_{U_i}(u)$ .

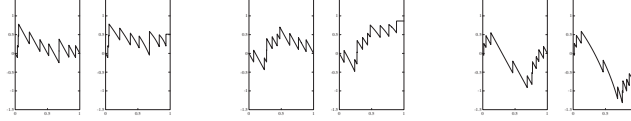
En particular,  $\mathcal{Q}^{-1}b_{U_i}(t) = w_U(t) = (\mathcal{Q}^{-1}b_U)(t) = b_U(t) + \int_0^t \frac{b_U(u)}{1-u} du = \mathbf{1}_{\{U \leq t\}} - t + \int_0^t \frac{\mathbf{1}_{\{U \leq u\}} - u}{1-u} du = \mathbf{1}_{\{U \leq t\}} + \log(1 - t \wedge U)$ , y entonces, por linealidad,

$$w_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (\mathbf{1}_{\{U_{(i)} \leq t\}} + \log(1 - t \wedge U_{(i)}))$$

La figura 3 muestra el proceso empírico  $b_U(u)$  y su transformado  $w_U(u)$ , para un valor arbitrario de  $U$ . La figura 4 muestra procesos empíricos y sus correspondientes transformados, para muestras de tamaños 10 y 50, respectivamente.

<sup>2</sup>Los procesos empíricos transformados aparecen por primera vez en [3].

Tres muestras de tamaño 10:



Tres muestras de tamaño 50:

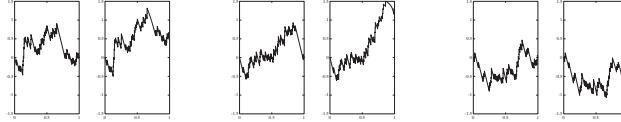


Figure 4: Proceso empírico y proceso empírico transformado para muestras uniformes de tamaños 10 y 50.

La función aleatoria  $w_n$  decrece en cada intervalo  $(U_{(i-1)}, U_{(i)})$  comprendido entre dos elementos sucesivos de la muestra, y salta hacia arriba en una magnitud  $1/\sqrt{n}$  en cada  $U_{(i)}$ .

El incremento entre  $U_{(i-1)}$  y  $U_{(i)}$  es

$$Z_i = w_n(U_{(i)}) - w_n(U_{(i-1)}) = \frac{(n-i+1) \log \frac{1-U_{(i)}}{1-U_{(i-1)}} + 1}{\sqrt{n}}. \quad (12)$$

Los cocientes  $\frac{1-U_{(i)}}{1-U_{(i-1)}}$  son independientes, con distribución  $\mathbf{P}\{\frac{1-U_{(i)}}{1-U_{(i-1)}} < s\} = s^{n-i+1}$ , de modo que para cada  $c > 0$ ,  $\mathbf{P}\{-(n-i+1) \log \frac{1-U_{(i)}}{1-U_{(i-1)}} > c\} = \mathbf{P}\{\frac{1-U_{(i)}}{1-U_{(i-1)}} < e^{-c/(n-i+1)}\} = e^{-c}$ .

Como consecuencia de este cálculo, resulta que las variables  $Y_i = \sqrt{n}Z_i$  son i.i.d.  $\sim (1 - \text{Exp}(1))$ , y eso significa que  $w_n$  evaluado en los puntos de la muestra tiene la distribución de las sumas parciales tipificadas  $w_n(U_{(i)}) = \sum_{j=1}^i Z_j$  de las variables  $Y_i \sim (1 - \text{Exp}(1))$ , que son centradas y tienen variancia 1.

Repetimos la construcción de la sección anterior, para inscribir las sumas parciales de las variables  $Z_i$  en un proceso de Wiener  $w$ . La proximidad uniforme de  $U_{[nt]}$  con  $t$  y de  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[nt]} T_i$  permiten concluir el enunciado siguiente:

**Lema 5.2** Si  $U_{n,i}, i = 1, 2, \dots, n$  es un arreglo triangular de variables uniformes en  $[0, 1]$  independientes, hay una sucesión de copias  $w_n^*$  de los procesos empíricos transformados  $w_n(u)$  y un proceso de Wiener  $w$  tales que

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq u \leq 1} |w_n^*(u) - w(u)| = 0.$$

*Demostración de la convergencia de copias del proceso empírico al puente browniano.* Tomamos como copias de  $b_n$ , las imágenes  $b_n^* = Qw_n^*$  de los procesos empíricos transformados construidos en la demostración del Lema 5.2, y llamamos  $b = Qw$  al puente browniano imagen del proceso  $w$  del que se parte en la misma demostración. Por la continuidad de  $Q$ , deducimos

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \sup_t |b_n^*(t) - b(t)| = 0.$$

## 6 Una aplicación estadística

La convergencia en distribución de  $b_n$  a  $b \circ F$  cuando  $b_n$  es el proceso empírico de una muestra aleatoria simple de  $F$ , tiene aplicación para probar la hipótesis de ajuste  $\mathcal{H}_0: "F = F_0"$ .

Para ello se utilizan funcionales de  $b_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - F_0(t))$  a modo de medidas del apartamiento entre  $F_n$  y  $F_0$ .

Por ejemplo, la prueba de Kolmogorov - Smirnov se basa en el estadístico  $\sup_t |b_n(t)|$ , la de Cramér - von Mises en  $\int b_n^2(t) dF_0(t)$ . Ambas funcionales son continuas en la norma del supremo, y por consiguiente sus distribuciones asintóticas son respectivamente las de  $\sup_{0 \leq u \leq 1} |b(u)|$  y  $\int_0^1 b^2(u) du$ .

## Referencias

- [1] Billingsley, Patrick, (1968) *Convergence of Probability Measures*, New York, Wiley.
- [2] Breiman, Leo, (1968) *Probability*. Reading, Mass., USA, Addison Wesley.
- [3] Cabaña, A. (1996), *Transformations of the empirical process and Kolmogorov-Smirnov tests*. Ann. Statist. **24** 2020-2035.
- [4] Donsker, M. D.(1952)*Justification and extension of Doob's heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorems.*, Ann. Math. Statist. 23 277.
- [5] Doob, J.L. (1949) *Heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorems*, Ann. Math. Statist. **20** 393-403.
- [6] Dudley, Richard M. (1989), *Real Analysis and Probability*. Pacific Grove, California, USA, Wadsworth & Brooks/Cole.
- [7] Feller, William, *Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones, vol. II*. 2da. ed.(1989), Ciudad de México, México, Limusa.

- [8] Karatzas, I. and Shreve, S. (1991), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. (2nd Edition), Springer-Verlag, New York.
- [9] Karlin, Samuel & Taylor, Howard M. (1975), *A first course in stochastic processes*. 2nd. ed., San Diego, USA, Academic Press.
- [10] León, J.R. & Ortega, J. (1989), *Paseo al Azar y Movimiento Browniano*. Segunda Escuela Venezolana de Matemáticas, Centro de Estudios Avanzados, Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Caracas, Venezuela.

E. M. CABAÑA  
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y DE ADMINISTRACIÓN  
Y FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA  
MONTEVIDEO, URUGUAY



## MATEMÁTICAS RECREATIVAS

### El Problema Bovinum de Arquímedes

Douglas Jiménez

Cuando un joven estudiante manifiesta inclinación por la matemática, la gente suele expresar “¡Ah! Le gustan los números”. Desde el propio ejercicio de la matemática a uno le gustaría decir que esta es una apreciación equivocada, pero más bien habría que calificarla de incompleta, pues el ejercicio matemático implica formas de pensamiento que van más allá del cálculo simple. Si a uno le gustan los números podría dedicarse por igual a la estadística práctica o a la contabilidad, actividades que un matemático profesional no considera de su competencia.

Sin embargo, no se puede negar que el trabajo con números es central en la actividad matemática, aunque más que las cuentas el matemático prefiere las propiedades; introduce así conceptos como estructuras, simetrías y otros que se pueden aplicar tanto a los números como a entes variados que no se parecen a los números en absoluto, salvo por los parentescos que establecen esos mismos conceptos.

Los números conducen casi que de manera natural a una idea que está en la esencia misma del quehacer matemático: *el infinito*. Una forma, quizá la más superficial entre otras, de aproximarse al concepto de infinito es el estudio de los grandes números. Arquímedes, matemático del siglo III a.C. y uno de los más grandes de la historia toda, dedicó al tema un artículo que es todo un clásico: *El arenario*, ensayo en el que demuestra al rey Gelón que no es infinito el número de granos de arena del cosmos; en donde por cosmos suscribe Arquímedes la idea de Aristarco de Samos de un universo heliocéntrico, con estrellas fijas y la tierra girando alrededor del sol.

En este memorable artículo, Arquímedes hace uso de una habilidad notacional excelente para demostrar que sólo hace falta darle un nombre adecuado a las cosas para identificar el número buscado de granos de arena y señala que tal número debe ser menor a lo que, en nuestra notación actual, es  $10^{63}$ . El artículo puede leerse completo en el tomo 4 de la *Enciclopedia Sigma, El mundo de las matemáticas*, de James R. Newman, Edit. Grijalbo, 1976 (páginas 4 a 17).

Pero a lo que aquí queremos hacer alusión es a otro problema de Arquímedes en el que también maneja números de gran tamaño y que se conoce con el nombre de *Problema de las reses*. El problema fue planteado en verso, supuestamente por el propio Arquímedes aunque algunos califican de apócrifa esta atribución. Lo que sí parece cierto es que Arquímedes se ocupó del problema.

Podemos revisar el poema parte por parte para ver cómo su lectura avanza desde matemática bastante elemental hasta terrenos de complejidad algo mayor. La versión que presentaremos también fue obtenida de la Enciclopedia Sigma, esta vez del tomo 1, páginas 124 y 125.

*Mide la cantidad de reses del Sol, oh extranjero,  
aplicando tu esfuerzo, si participas de la sabiduría;  
de las reses que pastaban en las llanuras de la isla de Sicilia  
Trinaquia divididos en cuatro rebaños  
de colores distintos: el uno blanco como la leche,  
otro brillando con un color azul,  
otro amarillo, y otro variado....*

Obsérvese que el poema comienza como un reto intelectual: el lector debe demostrar su sabiduría calculando el número de reses que el dios Sol tiene en la llanura de Trinaquia, y para ello, como en todo problema, el cálculo debe hacerse a partir de unos datos dados. En este caso, tenemos cuatro rebaños de reses de colores distintos: blanco, azul, amarillo y variopinto. (Reses azules y amarillas no parecen ser usuales, y menos en los números que conseguiremos aquí. Claro que tratándose del dios Sol, o de cualquier otro dios, no debe haber mayor problema con eso. Otras traducciones los describen negros y marrones, pero nosotros mantendremos fidelidad a nuestro texto.) Es importante ver que las reses están distribuidas en números diferentes de machos y hembras repartidos en cada color, esto es lo que le dará forma al planteamiento del problema:

*... En cada  
rebaño había toros potentes en número  
componiendo esta simetría...*

“Potentes en número” significa que la cantidad de toros es un número que sorprenderá al lector. Una forma de ir preparándose para un desenlace sorprendente.

*... Imagina, ¡oh extranjero!,  
a los de pelo blanco iguales a la mitad y un tercio  
de los toros azules, y a todos los amarillos,*

¡Atención! He aquí un enunciado clásico para ser expresado en forma matemática. Designemos por  $TB$ ,  $TA$ ,  $TY$  y  $TV$ , respectivamente, al número de toros blancos, azules, amarillos (¡perdón!:  $Y$  de yellow, para no repetir la  $A$ ) y variopintos. Entonces los versos anteriores dicen que

$$TB = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)TA + TY,$$

y continúan de esta manera

*pero los azules iguales a la cuarta y quinta parte  
de los mezclados y, además, a todos los amarillos.  
Y ve que los restantes de color variado igualan  
una sexta y séptima parte de los blancos  
junto con todos los amarillos.*

¡Ajá!, más ecuaciones; por un lado

$$TA = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)TV + TY,$$

y por el otro

$$TV = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)TB + TY,$$

lo que puede resumirse en

$$\begin{aligned} TB &= \frac{5}{6}TA + TY \\ TA &= \frac{9}{20}TV + TY \\ TV &= \frac{13}{42}TB + TY \end{aligned}$$

Lo anterior es un sistema de ecuaciones lineales indeterminado, es decir, que admite infinitas soluciones. Pero lo más importante es que es de naturaleza diofántica, en otras palabras: ha de resolverse en números enteros. Si se mantiene a  $TY$  como una constante del problema lo que queda es un sistema de tres ecuaciones lineales en las tres incógnitas  $TB$ ,  $TA$  y  $TV$  que puede resolverse con las técnicas que se aprendieron en el noveno grado (o tercer año de bachillerato, para los de mayor edad). El resultado, como es natural, depende de  $TY$  y es

$$TB = \frac{742}{297}TY, \quad TA = \frac{178}{99}TY, \quad TV = \frac{1580}{891}TY.$$

Que hay infinitas soluciones se ve directamente del hecho de que el número de blancos, azules y variopintos depende del número de amarillos. Sin embargo, para que tenga sentido la solución y quede todo en números enteros como se espera,  $TY$  debe tener un valor múltiplo de todos los denominadores de las fracciones anteriores. Pero esto significa que el menor número de toros que satisfacen las condiciones anteriores se obtiene cuando  $TY$  es el mínimo común múltiplo de 287, 99 y 891, es decir que el número de toros amarillos sea 891, lo que da 2226 toros blancos, 1602 toros azules y 1580 toros variopintos: 6299 toros. ¡Un rebaño nada despreciable, ¿no?!

¡Ya va! ¡Ya va! Pero no todo queda aquí, porque no hemos metido a las vacas en la cuenta. Y es que el poema sigue:

*Las proporciones de las vacas eran éstas: las blancas  
eran iguales exactamente a una tercera parte  
y un cuarto de todo el rebaño de las azules;  
y las azules igualaban a su vez  
a un cuarto junto con una quinta parte de las mezcladas  
cuando iban a pastar todas con los toros.*

¡Ah! O sea que los números de vacas en el rebaño están relacionadas entre sí y también con los números de toros del rebaño, pero por colores. Porque si  $VB$ ,  $VA$ ,  $VY$  y  $VV$  son los números respectivos de vacas, los versos anteriores se pueden traducir en

$$VB = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)(VA + TA)$$

y

$$VA = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)(VV + TV).$$

Faltan, por supuesto, condiciones sobre las vacas de los rebaños de colores faltantes:

*Las variadas tenían igual número divididas en cuatro partes  
a una quinta parte y un sexto del rebaño de las amarillas.  
Las amarillas eran en número iguales a la mitad de una tercera parte  
del rebaño blanco y una séptima parte.*

Es decir,

$$VV = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(VY + TY)$$

y

$$VY = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(VB + TB).$$

Y ahora, la primera parte del reto:

*Di tú exactamente, ¡oh extranjero!, el número de las reses del Sol,  
por un lado el número de los robustos toros  
y por otro las vacas según el color de cada una,  
y no se te llamará ignorante o imperito en números,*

De manera que para ganarse esta distinción, el lector sin olvidar las condiciones que ya había establecido para los números de los toros, estaba obligado a resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} VB &= \frac{7}{12}(VA + TA) \\ VA &= \frac{9}{20}(VV + TV) \\ VV &= \frac{11}{30}(VY + TY) \\ VY &= \frac{13}{42}(VB + TB) \end{aligned}$$

el que, después de un tedioso trabajo, debe conducirlo a

$$VB = \frac{2402120}{1383129}TY; \quad VA = \frac{543694}{461043}TY;$$

$$VY = \frac{604357}{461043}TY; \quad VV = \frac{106540}{125739}TY;$$

en donde se ve que la solución depende nuevamente del número de toros amarillos, el cual debe seleccionarse –para obtener la solución en los valores más pequeños– igual al mínimo común múltiplo de 891, 1383129, 461043 y 125739, es decir, 4149387. Sustituyendo este valor en las fórmulas obtenidas anteriormente, se llega a la siguiente tabla contable:

	Toros	Vacas	
Blancos	10366482	7206360	17572842
Azules	7460514	4893246	11953760
Amarillos	4149387	5439213	9588600
Variopintos	7358060	3515820	10873880
	28934443	20854639	49789082

¡Debe haber sido algo extensa la llanura de Trinaquia para poder meter en ella 49789082 reses! (Al margen: el diccionario Larousse afirma que el territorio actual de Sicilia es de 25708 Km<sup>2</sup>, es decir, 25708000000 m<sup>2</sup>.)

Bueno... de acuerdo al testimonio del propio poema ya no se nos puede llamar “imperitos en números”, pero por aquí nos viene algo pues el poema todavía no termina:

*pero tampoco se te contará entre los sabios. Pero ven y comprende  
todas estas proporciones de las reses del Sol:*

¡Una sorpresita! El problema continúa: faltan datos. Pues bien, sigamos:

*Cuando los toros blancos mezclaron su número  
con los azules, se mantuvieron firmes con igual número  
en profundidad y anchura, y todas las largas  
llanuras de Trinaquia se llenaron en cuadro.*

Entonces es un cuadrado el número total de toros blancos y azules:

$$TB + TA = C^2,$$

condición que no cumple la solución que hemos obtenido hasta ahora. Mas hay que observar que nuestra solución parcial es la mínima para los datos que hasta ese momento teníamos, pero cualquier múltiplo entero fijo de ellas también satisface al problema; así que podemos volver al momento en que sólo nos ocupábamos de los toros, de manera que si  $H$  es un número entero, cada uno de los números que obtuvimos en ese momento se puede multiplicar por  $H$  y la solución es válida. Con relación a nuestra última ecuación esto significa que

$$2226H + 1602H = C^2,$$

de donde

$$3828H = C^2.$$

Aunque todavía queda por leer en el poema:

*Además, cuando los amarillos se reunieron junto con los variados  
se dispusieron de manera que empezando desde uno creció su número  
hasta formar una figura triangular, y no había  
toros de otros colores, ni faltaba ninguno.*

El poeta introduce ahora el concepto de número triangular: estos son números que se obtienen sumando los enteros positivos en secuencia

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

hasta un número entero determinado. Quizás el lector conozca la fórmula siguiente:

$$1 + 2 + 3 + \dots + \Delta = \frac{\Delta(\Delta + 1)}{2},$$

por lo cual los versos anteriores matemáticamente se pueden traducir como

$$TY + TV = \frac{\Delta(\Delta + 1)}{2},$$

o, aplicando los comentarios anteriores,

$$4942H = \Delta^2 + \Delta$$

Ahora, para no olvidar que las vacas nos cambiaron el número original de toros que habíamos encontrado, obsérvese que el número de toros de cada color que aparecen en la tabla contable anterior es igual a cada uno de los números originales multiplicados por 4657, el cual es un número primo. Lo que significa que podemos hacer

$$H = 4657h,$$

en donde  $h$  es cierto número entero. Además

$$3828 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 = 4 \cdot 957,$$

razón por la cual la ecuación  $3828H = C^2$ , se transforma en

$$C^2 = 4 \cdot 957 \cdot 4657h.$$

Esto obliga a que  $h$  tenga como factores a 957, 4657 y algún otro término cuadrático, es decir

$$h = 957 \cdot 4657y^2.$$

Si todo esto se incorpora a la ecuación  $4942H = \Delta^2 + \Delta$ , entonces esta se modifica como

$$4942 \cdot 957 \cdot 4657^2 y^2 = \Delta^2 + \Delta,$$

o, lo que es lo mismo

$$\Delta^2 + \Delta = 102571605819606y^2.$$

Si esta igualdad la multiplicamos por 4 y completamos el cuadrado, entonces queda como

$$(2\Delta + 1)^2 = 410286423278424y^2 + 1,$$

lo que con la asignación

$$x = 2\Delta + 1$$

se transforma en

$$x^2 - 410286423278424y^2 = 1.$$

Las ecuaciones diofánticas del tipo  $x^2 - dy^2 = 1$ , donde  $d$  debe carecer de cuadrados, se conocen como ecuaciones de Fermat, pues fue este abogado con inclinaciones matemáticas (y de las buenas), quien por primera vez las propuso en 1657. Su solución hace uso de matemática de muy altos quilates y quizá quede para un posterior artículo. De todas formas, dado que en nuestro caso particular,  $d$  es un número muy grande, las soluciones mínimas implican números de 206541 cifras.

Queda por lo tanto la duda de si Arquímedes terminó de resolver este problema: tal número de reses no caben en la tierra toda... ni siquiera en toda la extensión del Sol. De manera que entonces, no tenemos más remedio que admitir humildemente nuestra imposibilidad de recibir la distinción que el poema reserva para su final:

*Si encuentras todo esto, extranjero, y lo reúnes en tu mente  
y das todas las medidas de las cantidades  
marcharás con la gloria de la victoria y sabrás  
que se te considera perfecto en esta ciencia.*

DOUGLAS JIMÉNEZ  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
UNEXPO  
VENEZUELA



**INFORMACIÓN NACIONAL**

**XVI JORNADAS VENEZOLANAS DE  
MATEMÁTICAS**

**Universidad Simón Bolívar**

2003

**Comité Organizador:**

Argimiro Arratia, USB (arratia@ma.usb.ve)  
Lyonell Boulton, USB (lboulton@ma.usb.ve)  
Alejandra Cabaña, IVIC (acabana@ivic.ve)  
Carlos Di Prisco, IVIC (cdiprisc@ivic.ve)  
Eduardo Lima, USB (elima@usb.ve)  
José Luis Palacios, USB (jopala@cesma.usb.ve)  
Mercedes Rosas, USB (mrosas@ma.usb.ve)  
Rafael Sánchez, UCV (rsanchez@euler.ciens.ucv.ve)

**Comité de Programa:**

Argimiro Arratia, USB (arratia@ma.usb.ve)  
Diómedes Barcenás, ULA (barcenás@ciens.ula.ve)  
Wilmer Colmenares, UCLA (wilmerc@ucla.edu.ve)  
Ennis Rosas, UDO (erosas@sucre.udo.edu.ve)  
Fernando Sánchez, LUZ (fsanchez@luz.ve)

**Selección de trabajos**

Como ya es tradición, la presentación de trabajos se hará por sesiones. La decisión de cuantas y cuales sesiones habrá recae sobre el Comité de Programa. Las personas y grupos interesados en la inclusión de un área en las jornadas, deberán notificarlo a uno de los miembros del Comité de Programa o del Comité Organizador, incluyendo sugerencias para posibles coordinadores. La aceptación de trabajos para cada sesión, así como la organización de la misma será responsabilidad del coordinador designado por el Comité de Programa.

**Sesiones Propuestas**

1. Probabilidad y Estadística, organiza: Daniel Barráez, UCV, (dbarraez@euler.ciens.ucv.ve)
2. Geometría Diferencial y Física Matemática, organizan: Carlos Durán, IVIC, (cduran@ivic.ve) y Rafael Díaz, IVIC, (radiaz@ivic.ve),
3. Ecuaciones Diferenciales. Teodoro Lara, ULA, teodorolara@cantv.net, Judit Vanegas, USB, (cvanegas@usb.ve)

4. Algebra y Teoría de Números, organiza Pedro Berrizbeitia, USB, (pedrob@usb.ve) y Boris Iskra, USB. (iskra@ma.usb.ve)
5. Educación Matemática, organizan Enrique Planchart , USB, (eplan@usb.ve) y Sabrina Garbin, USB, (sgarbin@usb.ve)
6. Matemática y Petróleo, organizan Saul Buitrago, INTEVEP, (buitragos@pdvsa.com) y Douglas Espin, INTEVEP, (espinds@pdvsa.com)
7. Sistemas Dinámicos, organizan Wilmer Colmenares, UCLA, (wilmerc@ucla.edu.ve) y Neptalí Romero, UCLA, (nromero@ucla.edu.ve)
8. Análisis, organizan: María Dolores Morán, UCV, (mmoran@euler.ciens-ucv.ve) y Lyonell Boulton, USB, (lboulton@ma.usb.ve).
9. Lógica, Combinatoria e Informática Teórica, organizan Carlos Di Prisco, IVIC, (cdiprisc@ivic.ve) y Ramón Pino, ULA, (pino@ula.ve)

## INFORMACIÓN NACIONAL

# XVI Escuela Venezolana de Matemáticas (EVM) Mérida, 7 al 13 de septiembre de 2003

## 1 Cursos:

1. Ondas viajeras en modelos físicos y biológicos.  
Gilberto Flores (Universidad Nacional Autónoma de México)
2. Selección de modelos y aprendizaje.  
Carene Ludeña (Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas) y  
Ricardo Ríos (Universidad Central de Venezuela)
3. Flujos geodésicos en superficies  
Rafael Oswaldo Ruggiero (Pontificia Universidad Católica de Rio de Janeiro)
4. Teoría del Orden  
Elías Tahhan (Universidad Simón Bolívar) y  
Maurice Pouzet (Université de Lyon)

## 2 Detalles:

### 2.1

#### **Ondas viajeras en modelos físicos y biológicos. Gilberto Flores**

##### **Objetivo y prerrequisitos:**

Se presentarán de manera unificada los aspectos de modelación y análisis matemático de la propagación de ondas viajeras, enfatizando que este fenómeno se presenta en la Naturaleza. Nos concentraremos en el contexto de propagación de ondas en aguas poco profundas y en la propagación de impulsos eléctricos en nervios.

Los requisitos son: un curso básico de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, análisis cualitativo del plano de fases de sistemas autónomos en dos dimensiones, soluciones de sistemas asintóticamente lineales, familiaridad con elementos básicos de Sistemas Dinámicos: conexiones homoclínicas y heteroclínicas, variedades estables e inestables.

**Programa:**

El descubrimiento de Scott Russell: la onda solitaria. Deducción de las ecuaciones de Korteweg-deVries a partir de las ecuaciones de Euler en el límite de aguas poco profundas. Ondas viajeras.

El modelo de Hodgkin y Huxley para describir la propagación de impulsos eléctricos en una neurona. El modelo simplificado de FitzHugh y Nagumo. Bloques aislantes. Existencia de ondas viajeras en la ecuación escalar de Nagumo y en el sistema de FitzHugh-Nagumo. Ondas lentas y rápidas. Descripción de la dinámica en la ecuación escalar de Nagumo: el umbral. Análisis de la estabilidad lineal de las ondas viajeras. Estabilidad no lineal, la función de Evans.

**Bibliografía.**

J. Cronin. Mathematical aspects of Hodgkin-Huxley neural theory. Cambridge University Press, 1987.

P.G. Drazin, R.S. Johnson. Solitons: an introduction. Cambridge University Press. 1989.

J. Evans. Nerve axon equations. The stable and the unstable impulse. Indiana University Mathematical Journal. Vol. 24, 1975. págs. 198-226.

G. Flores. Modelos de conducción de impulsos eléctricos en nervios. Revista de la Real Academia de Ciencias de Madrid. Vol. 87, 1994. págs. 223-262. Publicado también en la serie Monografías del IIMAS, UNAM.

- The stable manifold of the standing wave of the Nagumo equation. Journal of Differential Equations. Vol. 80, 1989, págs. 306-314.

- Stability Analysis for the slow traveling pulse of the Fitzhugh- Nagumo system. SIAM Journal on Mathematical Analysis, Vol. 22, 1991 págs. 392-399.

C. Jones, Stability of the traveling wave solution of the FitzHugh-Nagumo system. Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 286, 1984 págs. 431-469

J. Smoller, Shock Waves and Reaction Diffusion Equations. Springer-Verlag. 2a. Edición, 1996.

**2.2****Selección de modelos y aprendizaje.**

**Carene Ludeña y Ricardo Ríos**

**Introducción:** Un problema fundamental en estadística es el de determinar un “modelo” plausible para un conjunto de observaciones que siguen una ley  $P$  desconocida para el observador. Este problema no está bien planteado pues para todo conjunto de datos existen infinitas soluciones al problema anterior. La solución clásica consiste en parametrizar el problema: suponer que el modelo pertenece a una familia de conjuntos parametrizables por un número finito y conocido de parámetros. Sin embargo, esta selección es arbitraria y es muy justificado cuestionar la selección a priori de la descripción paramétrica del modelo,

antes de observar los datos. Una alternativa está dada por la metodología de selección de modelos. Básicamente, se propone una colección de espacios finito dimensionales de complejidad creciente (por ejemplo, se consideran subespacios de un espacio de Hilbert dado) y un mecanismo de selección que escoge el “mejor” subespacio y en él al “mejor” modelo. Para ello se requiere definir una medida de optimalidad, usualmente en base a una cierta función de pérdida que depende de las características del problema de estimación y un mecanismo de selección por minimización de esta función en base a los datos.

Para que el esquema anterior tenga sentido y sea posible controlar los errores de estimación, es necesario estudiar la discrepancia entre el minimizador de la función dependiente de los datos y la “mejor” selección teórica posible, si el modelo fuese conocido al observador. El control, en probabilidad o en términos de la esperanza teórica, de los errores de estimación depende de desigualdades exponenciales y de momentos basados por un lado, en control de la entropía del conjunto de funciones que definen cada familia finito dimensional en el marco teórico desarrollado por Vapnik y por otro en desigualdades debidas a Talagrand y Ledoux y aplicadas al problema de selección de modelos recientemente por Massart y Birgé.

La idea de este curso es estudiar tres problemas de estimación: estimación de probabilidades (densidades), regresión y reconocimiento de patrones en el marco anterior. Se analizarán asimismo varios modelos que calzan en la anterior metodología tales como estimación por redes neurales, máquinas de soporte vectorial, estimación en bases ortonormales y estimación no paramétrica (por histogramas).

#### **Programa del curso:**

1. Introducción. Descripción de los tres modelos básicos: estimación de densidades, regresión y reconocimiento de patrones. Selección de modelos. Estimación penalizada por la dimensión. Riesgo empírico y función de riesgo. Desigualdades no asintóticas.
2. Teoría de Vapnik. Minimización estructural de riesgo. Cotas basadas en entropía. Dimensión de vapnik-Chevornenkis. Desigualdades exponenciales.
3. Desigualdades de Talagrand y Ledoux. Teoría de selección de modelos de Birgé y Massart. Desigualdades exponenciales y de momentos.
4. Aplicación a los problemas propuestos. Estudio de ejemplos. Estimación de densidades y reconocimiento de patrones. 5. Regresión. Regresión en modelos de observaciones indirectas.

**Bibliografía:**

1. Baraud, Y. Model selection for regression on a fixed design. *Probab. Theory and Relat. Fields.* 117, 2000.p. 467-493.
2. Barron,A., Birgé, L. y Massart, P. Risk bounds for model selection via penalization. *Probab. Theory and Related Fields.* 113, 1999. p. 301-413.
3. Birgé, L. y Massart, P. Minimum contrast estimators on sieves: exponential bounds and rates of convergence. *Bernoulli*, 4(3), 1998. p. 329-375.
4. Ledoux, M. Isoperimetry and Gaussian analysis. In *Probabilités se St. Flour XXIV, 1994*, Ed. by P. Bernard, 1996. p. 165-294. Springer, Berlin.
5. Ledoux, M. On Talagrand deviation inequalities for product measures. *ESAIM: probabilities and Statistics* 1, 1996. p. 63-87.
6. Massart, P. Some applications of concentration inequalities to statistics. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.* Vol. IX (2), 2000. p. 245-303.
7. Talagrand, M. An isoperimetric theorem on the cube and the Khintchine-Kahane inequalities on product spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* 104, 1988. p. 905-909.
8. Talagrand, M. Sharper bounds for empirical processes. *Annals of Prob.*, 22, 1994. p. 28-26.
9. Vapnik, V. Estimation of dependences based on empirical data. *Springer Series in Statistics.* 1982.
10. Vapnik, V. *Statistical Learning Theory.* J. Wiley, New York 1998.
11. Vapnik, V. *The nature of statistical learning.* Statistics for engineering and information science. Springer, 1999.

**2.3****Flujos geodésicos en superficies  
Rafael Oswaldo Ruggiero**

El objetivo del minicurso es hacer una introducción a ciertos aspectos de la teoría de flujos geodésicos en superficies relacionados con dinámica hiperbólica. Se necesitarán conocimientos previos básicos sobre ecuaciones diferenciales, geometría de superficies (curvatura, geodésicas, conexiones); algún conocimiento de geometría hiperbólica ayudaría. Habrá una exposición preliminar con un

recuento de ciertas estructuras y resultados básicos de la teoría (conexión de Levi-Civita, ecuación de las geodésicas, ecuación de Jacobi, métrica de Sasaki, ejemplos de flujos geodésicos en superficies de curvatura constante). A continuación se expondrán algunos de los teoremas más importantes que muestran la interacción entre geometría y sistemas dinámicos en la teoría de flujos geodésicos:

1. Superficies compactas de curvatura negativa tienen flujos geodésicos de Anosov.
2. Si el flujo geodésico de una superficie es Anosov, entonces no tiene puntos conjugados.
3. Si una superficie no tiene puntos conjugados, el flujo geodésico es Anosov si y sólo si es casi-Anosov.

El primer teorema es debido a E. Hopf, el segundo es un trabajo de W. Klingenberg, y el tercero es un resultado de R. Mañé basado en un famoso teorema de P. Eberlein. Estos teoremas en realidad son verdaderos en variedades compactas de cualquier dimensión, y las ideas utilizadas en sus demostraciones fueron y son motivo de importantes trabajos de investigación en geometría, dinámica y topología. Si el tiempo lo permite, se podrían incluir en el programa algunas aplicaciones de dichas ideas al estudio de cáusticas en toros Lagrangianos invariantes por flujos de Euler-Lagrange, área de investigación relacionada con la mecánica clásica.

#### **Bibliografía**

1. Anosov, D.: Geodesic flow on closed Riemannian manifolds of negative curvature. Tr. Mat. Inst. Steklova 90 (1967).
2. Eberlein, P.: When is a geodesic flow of Anosov type?, I. J. Diff. Geom. 8 437-463 (1973).
3. Klingenberg, W.: Riemannian manifolds with geodesic flow of Anosov type. Ann. Math. 99 1-13 (1974).

## **2.4**

### **Teoría del Orden**

**Elías Tahhan (USB) y Maurice Pouzet (U. Lyon)**

**Objetivos:** Presentar las bases de la teoría del orden así como aplicaciones a la informática teórica

**Prerrequisitos:** Este curso se dirige a Licenciados en matemáticas o ciencias de la computación y a ingenieros en computación.

#### **Programa:**

1. Presentación de algunos resultados de base de la teoría del orden (teoremas de ERDÖS-SZEKERES, de DILWORTH, SPERNER y SZPILRAJN) y de algunos ejemplos de órdenes fundamentales (divisibilidad; implicación; retículos de partes, de subespacios vectoriales, de particiones; el permutaedro, poliedros y complejos simpliciales ).

2. Diagramas de Hasse. Construcciones de órdenes, productos directos, sumas y productos lexicográficos (órdenes “serie- paralelos”; órdenes sin “N”). Grafos de comparabilidad (resultados de GALLAI, SHEVRIN y FILLIPOV).
3. Del finito hacia el infinito: órdenes bien fundados, buenos órdenes, principio de inducción, ordinales, algunas construcciones y pruebas por inducción transfinita (descomposición de un conjunto ordenado bien fundado y de un espacio topológico), Zornificación. Propriedad de carácter finito, ultrafiltración y compacidad; versiones combinatorias de la compacidad : KOENIG, RADO, lema de coherencia; ejemplos de aplicaciones : teoremas de Ramsey, Dilworth, Szpilrajn, Erdős-de Bruijn.
4. Retículos completos; teorema del punto fijo de Tarski. Clausura, preclausura, engendramiento, partes libres, familias de Moore (ejemplos: completación de MacNeille y retículos de las secciones iniciales). Clausura algebraica (ejemplos: matroides y antimatroides). Estructuras de incidencia; retículos de Galois; relaciones de Ferrers; fórmulas de inversión. Secciones iniciales de un conjunto ordenado; dualidad entre conjuntos ordenados y retículos de secciones iniciales, dualidad de Stone-Priestley, construcción de espacios esparcidos y de retículos dispersos.
5. Representación de un conjunto ordenado en un producto de cadenas, dimensión en el sentido de DUSHNIK-MILLER. Extensiones lineales y cadenas de secciones iniciales. Dimensión de un orden y retículos de secciones iniciales: el teorema de BOUCHET. Ordenes y grafos de intervalos; dimensión de Ferrers. Aspectos combinatorios y algorítmicos de la enumeración de extensiones lineales. El “retículo” de las extensiones de un orden. El politopo generado por los órdenes totales.
6. Buenos órdenes parciales. La teoría: desde los teoremas de Higman, Kruskal, Nash-Williams a los teoremas de Ehrenfeucht-Haussler-Rozenberg (1983) y Kriz (1988). El teorema de De Jongh y Parikh ( ilustración: palabras, árboles binarios, bosques ordenados, órdenes serie-paralelos); estructuras de partes cofinales.
7. Clases de estructuras definidas por obstrucciones; una clasificación por edades de relaciones; comportamiento asintótico del perfil de relaciones. Breve presentación del teorema de Robertson y Seymour y de algunas consecuencias.
8. Terminación de sistemas de reescritura de términos. Indecidibilidad de la terminación de SRT (prueba de Huet y Lévy), órdenes de reducción, métodos de interpretación, órdenes de simplificación, órdenes recursivos



de caminos (Lescanne, Rusinowitch, Dershowitz), análisis recursivo de la terminación de SRT confluentes (O'Donnell, Gramlich).

9. Cotas recursivas para las sucesiones malas de buenos órdenes parciales, casos de suma de BOP, producto de BOP, órdenes de Higman sobre las palabras y órdenes de Kruskal sobre árboles etiquetados. Cotas recursivas para las derivaciones de SRT confluentes.

#### **Bibliografía:**

- Ordered sets, I.RIVAL Ed., Reidel, 1982.  
 Graphs and Order, I.RIVAL Ed., Reidel, 1985.  
 Algorithms and Order, I.RIVAL Ed., Reidel, 1989.  
 Combinatorics and partially ordered sets. Dimension theory, Trotter, William T, Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1992.  
 Formal concept analysis, B.Ganter, R.Wille; Springer, 1999. Algebraic theory of lattices, P.CRAWLEY , R.P.DILWORTH, Prentice-Hall, 1973.  
 General lattice theory, G.Gratzer, Birkhauser, 1998.  
 A compendium on continuous lattices, G.GIERZ, K.H.HOFMANN, K.KEIMEL, J.D.LAWSON, M.MISLOVE, D.S.SCOTT, Springer-Verlag, 1980.  
 Enumerative combinatorics, Vol1, 2, R.Stanley, CUP, 2000.  
 Logic and Combinatorics, S.SIMPSON, AMS Pub 1987.  
 Combinatorics on words, LOTHAIRE, Addison-Wesley.  
 Theory of relations, R.FRAISSE, North-Holland, 2000.  
 Foundations of Logic Programming, J.W.LLOYD, Springer-Verlag, 1984.  
 Deterministic and stochastic scheduling, M.AH.DEMPSTER, J.K.LENSTRAND and A.H.G.RINNOOY KAN Ed., Reidel, DORDRECHT,1982.  
 Term Rewriting and All That, F, BAADERet T. NIPKOW, Cambridge University Press, 1998.  
 What's so special about Kruskal Theorem and the ordinal  $\Gamma_0$ ? A survey of some results in proof theory. J.H. GALLIER. Ann. Of Pure and Applied Logic 53 (1991).

**Información e Inscripciones:** <http://evm.ivic.ve>

## La Esquina Olímpica

Rafael Sánchez Lamonedá  
Escuela de Matemáticas  
Universidad Central de Venezuela, Venezuela  
rsanchez@euler.ciens.ucv.ve

De finales de Junio a comienzos de Octubre de 2002 se han llevado a cabo las tres competencias matemáticas internacionales más importantes en las cuales anualmente participamos. En orden cronológico ellas son, la IV Olimpiada Matemática Centroamericana y del Caribe, OMCC, celebrada del 29 de Junio al 6 de Julio en Mérida, México, la 43ª Olimpiada Internacional de Matemáticas, IMO, Glasgow, Escocia, del 17 al 31 de Julio y la XVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, OIM, San Salvador, El Salvador, del 28 de Septiembre al 6 de Octubre.

Las delegaciones que nos representaron fueron las siguientes:

### IV OMCC

Aurora Stephany. Escuela Comunitaria San Antonio de los Altos.  
José Javier Sanahuja. Colegio La Salle. Barquisimeto.  
José Nelson Ramírez. Liceo Don Bosco. Jubidana. Edo. Falcón.  
Tomás Kabbabe. Tutor. USB.  
Prof. José Hebert Nieto. Jefe de Delegación. LUZ.  
Prof. Douglas Jiménez. Observador. UNEXPO.

Los jóvenes Aurora Stephany y José Sanahuja, ganaron mención honorífica. Como nota adicional a este evento hay que resaltar que Venezuela será la sede de la próxima OMCC, la cual se realizará en Junio de 2003 en la ciudad de Mérida.

### 43ª IMO

Adolfo Rodríguez. Colegio San Juan Bautista. San Juan de los Morros.  
Paúl Monasterio. Colegio Santo Domingo de Guzmán. Caracas.  
Héctor Chang. Colegio Santo Domingo de Guzmán. Caracas.  
Fernando Delgado. Colegio Humboldt. Caracas.  
Aurora Stephany. Escuela Comunitaria San Antonio de los Altos.  
Prof. Henry Martínez. Tutor. UPEL-IPC.  
Prof. Rafael Sánchez. Jefe de Delegación. UCV.

Por segundo año consecutivo nuestra delegación tiene una actuación destacada al ganar medalla de plata, medalla de bronce y mención honorífica. La medalla de plata fue la segunda calificación más alta de los 70 competidores de iberoamérica. Los ganadores de estos premios fueron, Adolfo Rodríguez, medalla de plata, Paúl Monasterio, medalla de bronce y Héctor Chang, mención honorífica.



La delegación de Venezuela en la 43ª IMO

#### XVII OIM.

Fernando Delgado. USB.

Héctor Chang. USB.

Adolfo Rodríguez. UCV.

Manuel Modestito. Institutos Educativos Asociados. Caracas.

David Seguí. Tutor. USB.

Prof. Henry Martínez. Jefe de Delegación. UPEL-IPC.

En esta olimpiada ganamos una medalla de plata y dos de bronce. Los galardonados fueron, Fernando Delgado, plata, Héctor Chang y Adolfo Rodríguez, bronce.

En resumen en este año 2002 nuestros muchachos ganaron un total de cinco medallas, dos de ellas de plata y tres de bronce y tres menciones honoríficas. Estos logros son el resultado de nuestro programa de entrenamiento, el cual se lleva adelante en las universidades, LUZ, ULA, UNEXPO, UCLA, USB y UCV y con la participación de colegas y estudiantes exolímpicos de esas instituciones

además de la UPEL-IPC y el IVIC. El programa de entrenamiento para el año 2002 comenzará en Octubre de 2002 y esperamos atender a más de 150 estudiantes. Queremos aprovechar la oportunidad para invitar a colegas de otras instituciones a sumarse a esta actividad, la cual produce beneficios a nuestra comunidad que se reflejan en un aumento de la calidad de los estudiantes que ingresan a la carrera de matemáticas en cada una de las universidades del país. Para mayor información pueden escribir a mi dirección electrónica: rsanchez@euler.ciens.ucv.ve .

Para finalizar como de costumbre les presentamos algunas de las pruebas. Esta vez es la de la 43ª IMO.

## INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD 18-30 JULY 2002

Primer Día: 24 de Julio de 2002

Tiempo: 4 y 1/2 horas  
Cada problema vale 7 puntos.

Version Spanish

### Problema 1.

Sea  $n$  un entero positivo. Sea  $T$  el conjunto de puntos  $(x, y)$  del plano tales que  $x$  y  $y$  son enteros negativos con  $x + y < n$ . Cada punto de  $T$  se colorea de azul o rojo. Si un punto  $(x, y)$  es rojo, entonces también son rojos todos los puntos  $(x', y')$  de  $T$  tales que  $x' \leq x$  y  $y' \leq y$ .

Se dice que un conjunto de  $n$  puntos azules es de tipo  $X$  si las coordenadas  $x$  de sus puntos son todas distintas. Se dice que un conjunto de  $n$  puntos azules es de tipo  $Y$  si las coordenadas  $y$  de sus puntos son todas distintas.

Demostrar que el número de conjuntos de tipo  $X$  es igual al número de conjuntos de tipo  $Y$ .

### Problema 2.

Sea  $BC$  un diámetro de la circunferencia  $\Gamma$  de centro  $O$ . Sea  $A$  un punto de  $\Gamma$  tal que  $0^\circ < \angle AOB < 120^\circ$ . Sea  $D$  el punto medio del arco  $AB$  que no contiene a  $C$ . La recta que pasa por  $O$  y es paralela a  $DA$  intersecta a la recta  $AC$  en  $J$ . La mediatriz de  $OA$  intersecta a  $\Gamma$  en  $E$  y en  $F$ .

Demostrar que  $J$  es el incentro del triángulo  $CEF$ .

**Problema 3.**

Hallar todas las parejas de enteros  $m, n \geq 3$  para las cuales existen infinitos enteros positivos  $a$  tales que

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

es entero.

INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD  
18-30 JULY 2002

Segundo Día: 25 de Julio de 2002

Tiempo: 4 y 1/2 horas  
Cada problema vale 7 puntos.

Version Spanish

**Problema 4.**

Sea  $n$  un entero mayor que 1. Los divisores positivos de  $n$  son  $d_1, d_2, \dots, d_k$  con

$$1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n.$$

Se define  $D = d_1d_2 + d_2d_3 + \dots + d_{k-1}d_k$ .

1. Demostrar que  $D < n^2$ .
2. Determinar todos los números  $n$  tales que  $D$  es un divisor de  $n^2$ .

**Problema 5.**

Sea  $R$  el conjunto de los números reales. Hallar todas las funciones  $f$  de  $R$  en  $R$  tales que

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

para todos los  $x, y, z, t$  en  $R$ .

**Problema 6.**

En el plano sean  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$  circunferencias de radio 1, donde  $n \geq 3$ . Sean sus centros  $O_1, O_2, \dots, O_n$  respectivamente. Supongamos que ninguna recta del plano interseca a más de dos de las circunferencias dadas. Demostrar que

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{O_j O_i} \leq \frac{(n+1)\pi}{4}$$

## INFORMACIÓN INTERNACIONAL

### Congreso Internacional de Matemáticos, 2002 Beijing, China

El 24o. Congreso Internacional de Matemáticos (ICM 2002) se llevó a cabo del 20 al 28 de agosto de 2002 en la ciudad de Beijing, China. El ICM es organizado por la Unión Matemática Internacional (IMU) y se celebra cada cuatro años de forma prácticamente ininterrumpida desde 1897. Este año reunió a alrededor de 4300 participantes, 1500 de ellos de China, 2700 de otros 100 países. De Venezuela participaron 4 matemáticos, todos de la Universidad Simón Bolívar: Mercedes Rosas y Lyonel Boulton, invitados por la IMU en su programa de apoyo a matemáticos jóvenes; Carmen Judith Vanegas que se encontraba en Alemania de año sabático y Eduardo Lima de Sá que venía de representar a Venezuela en la Asamblea General de la IMU en Shanghai.

Hubo 20 conferencias plenarias de 1 hora y 174 conferencias invitadas de 45 minutos. Los conferencistas son elegidos por un comité especial de IMU que trata de que estén representados los matemáticos que han hecho contribuciones significativas durante los últimos años. Se presentaron además numerosas conferencias cortas y "posters". Se anunciaron los ganadores de la medalla Fields y el premio Nevalinna junto con una corta reseña académica y biográfica. Los ganadores de la medalla Fields fueron:

- Laurent Lafforgue, francés ; del Institute des Hautes Etudes Scientifiques (IHES) de Bures-sur-Yvette, Francia. Por sus significativas contribuciones en el Programa de Langlands que dan nuevas conexiones entre Teoría de Números y Análisis.
- Vladimir Voevodsky, nacido en Rusia, terminó sus estudios en USA; del Institute for Advanced Study (IAS), Princeton, USA. Por desarrollar nuevas teorías de cohomología que dan nuevas maneras de ver la Teoría de Números y la Geometría Algebraica.

El premio Nevanlinna fue concedido a

- Madhu Sudan, nacido en India, terminó sus estudios en USA; del Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, USA. Por sus contribuciones en varias áreas de Computación Teórica: pruebas no comprobables aleatoriamente, problemas de optimización no aproximables y códigos con corrección de errores.

Cada uno de ellos dio una conferencia plenaria sobre su trabajo.

Un poco fuera del programa usual, hubo tres conferencias públicas especiales: John F. Nash Jr., Studying Cooperation in Games via Agencies. Stephen Hawkins, Brave New World. Wu Wen-Tsun, Un estudio comparativo entre el desarrollo de la Matemática en la antigua China y la antigua Grecia.

## Asamblea General de la Unión Matemática Internacional

Durante los días 17 y 18 de agosto de 2002 se llevó a cabo la 14<sup>a</sup>. Asamblea General de la Unión Matemática Internacional (IMU) en la ciudad de Shanghai, China. Participaron un total de 105 delegados, representando a 48 países, además de 14 observadores, los 7 miembros del Comité Ejecutivo y 2 directores de subcomités. Como delegado por Venezuela estuvo el profesor Eduardo Lima de Sá de la Universidad Simón Bolívar, en representación de la Asociación Matemática Venezolana.

Siguiendo la agenda propuesta, luego de nombrar los comités de credenciales, resoluciones, votaciones, finanzas y nominaciones, se hizo una revisión de las actividades de la Unión: boletín de la IMU, simposios y conferencias, Directorio Mundial de Matemáticos, Comisión Internacional para la Enseñanza Matemática (ICMI), Comisión de Desarrollo e Intercambio (CDE), Comisión Internacional de Historia de la Matemática (ICHM). Se informó que el próximo congreso de ICMI será en Copenhague en el 2004 y se esperan alrededor de 4000 participantes.

Se aprobaron los siguientes cambios de grupo: Egipto del grupo I al II, Georgia del grupo II al grupo I, Yugoslavia del grupo II al grupo I. Se aceptó como miembro del grupo I, a partir de 2003, a Bosnia-Herzegovina y como observador a la República Democrática de Corea.

La Comisión de Información y Comunicación Electrónicas (CEIC) presentó un informe de su actividad y una serie de recomendaciones recogidas en un folleto denominado "Recommendations on Information and Communication", disponible en la dirección de Internet <http://www.ceic.math.ca/recommendations>. Es un documento que tendrá un gran impacto en la comunicación entre matemáticos y en lograr una difusión muy amplia de trabajos de investigación y enseñanza matemática.

El comité de Finanzas presentó su análisis del reporte financiero y las propuestas para el 2003-2006. Fueron aprobados el informe, un aumento del 10 % en las cuotas anuales de los países miembros y el presupuesto para el período 2003-2006.

Se analizaron las propuestas de Italia, India y España para la sede del próximo Congreso Internacional de Matemáticos (ICM 2006) y se aprobó la sugerencia del Comité Ejecutivo: el ICM del 2006 se llevará a cabo en Madrid, España.

Se llevaron a cabo las elecciones para designar a los nuevos miembros de los organismos directivos de la IMU para el período 2003-06, con el resultado siguiente:

**Comité Ejecutivo IMU:**

Presidente:	John M. Ball	(Reino Unido)
Vice-Presidentes:	Jean-Michel Bismut	(Francia)
	Masaki Kashiwara	(Japón)
Secretario:	Phillip A. Griffiths	(USA)
Miembros:	Andrey A. Bolibruch	(Rusia)
	Martin Grötschel	(Alemania)
	Zhi-Ming Ma	(China)
	Ragni Piene	(Noruega)
	Madabusi S. Raghunathan	(India)
Ex-officio:	Jacob Palis (Ex-Presidente)	(Brasil)

**Comisión de Desarrollo e Intercambio (CDE):**

Presidente:	Paulo Domingos Cordaro	(Brasil)
Secretario:	C. Herbert Clemens	(USA)
Miembros:	Hajer Bahouri	(Tunez)
	Graciela L. Boente Boente	(Argentina)
	Shrikrishna G. Dani	(India)
	Gérard Gonzalez-Sprinberg	(Francia)
	Fazal M. Mahomed	(Sur Africa)
	Toshikazu Sunada	(Japón)
	Jiping Zhang	(China)

**Comisión Internacional de Enseñanza Matemática (ICMI):**

Presidente:	Hyman Bass	(USA)
Vice Presidentes:	Jill Adler	(Sur Africa)
	Michèle Artigue	(Francia)
Secretario:	Bernard R. Hodgson	(Canadá)
Miembros:	Carmen Batanero	(España)
	Mary Elizabeth Falk de Losada	(Colombia)
	Nikolai Dolbilin	(Russia)
	Peter Lawrence Galbraith	(Australia)
	Petar Stoyanov Kenderov	(Bulgaria)
	Frederick K.S. Leung	(Hong Kong)

**Comisión Internacional de Historia de la Matemática (ICHM):**

Miembros:	Jeremy John Gray	(United Kingdom)
	Wenlin Li	(China)

El Comité Ejecutivo designó también las siguientes miembros para el Comité de Información y Comunicación electrónicas: Pierre Berard (Francia), Jonathan Borwein (presidente, Canadá), John Swing (USA), Martin Gröetschel (representante del Comité Ejecutivo, Alemania), Alejandro Joffre (Chile), Peter Michor (Austria), David Morrison (USA) y Alfred van der Poorten (Australia).



Luego de algunos cambios propuestos por el comité de resoluciones, se adoptaron las siguientes:

1. La Asamblea General resuelve que la próxima Asamblea General se llevará a cabo en lugar y fecha convenientemente ligados al Congreso Internacional de Matemáticos que tendrá lugar en Madrid, España en el año 2006.
2. La Asamblea General expresa su gratitud al Comité Organizador de ICM 2002, presidido por Ma, Zhi-Ming.
3. La 14a. Asamblea General le da sus calurosas gracias al Comité Ejecutivo y al presidente de IMU por su trabajo durante el período 1999-2002.
4. La Asamblea General agradece especialmente a Phillip Griffiths por su excelente trabajo como Secretario del IMU durante los últimos cuatro años asistido por Arlen Hasting y Linda Geraci. Agradece también al Instituto de Estudios Avanzados (IAS) de Princeton por su generoso apoyo al secretariado del IMU durante ese período.
5. La Asamblea General recomienda mantener la tradición de los ICM de 1994, 1998, 2002, de tener una conferencia Emma Noether dentro de los próximos ICM (2006 y 2010), con el conferencista seleccionado por un comité nombrado por el IMU.
6. La Asamblea General de la IMU apoya el documento “Buenas Prácticas” del Comité de Información y Comunicación Electrónicas (CEIC), apoyado también por el Comité Ejecutivo de la IMU en su reunión del 13 de abril de 2002. En particular, la Asamblea apoya las previsiones diseñadas para asegurar el acceso de los matemáticos de los países en vías de desarrollo a la literatura matemática actual: la puesta de los artículos en páginas personales y servidores y la práctica que están iniciando algunas editoriales de dar el acceso gratuito a artículos en forma electrónica cinco años después que han sido publicados o aun antes. Una parte importante de lograr que la literatura matemática esté disponible es acordar estándares comunes para la digitalización. La Asamblea felicita a la CEIC por su trabajo en esa materia e insta a hacer más esfuerzos en esa dirección.
7. A pesar de la gran tensión de estos tiempos y de las preocupaciones de seguridad, instamos a la continuación del intercambio y publicación científica. La IMU se opone a esfuerzos por parte de gobiernos u organizaciones para restringir contactos e interacciones en la comunidad matemática internacional. Específicamente, nos oponemos a que se hagan responsables a matemáticos individuales por las acciones de sus gobiernos. La IMU está de acuerdo y apoya los principios expresados en el

artículo 5 de los estatutos del Consejo Internacional de Ciencias (ICSU), adoptado por la Asamblea General de 1998, que dice: “en el seguimiento de sus objeciones respecto los derechos y responsabilidades ICSU, como un cuerpo internacional no gubernamental, respetará y defenderá activamente el principio de la universalidad de la ciencia/ Este principio implica la libertad de asociación y expresión, acceso a los datos e información y libertad de comunicación y desplazamiento relacionados con actividades científicas internacionales, sin ninguna discriminación basada en factores como ciudadanía, religión, credo, posición política, origen étnico, raza, color, lenguaje, edad o sexo. El ICSU reconocerá y respetará las políticas científicas internas de sus Miembros Científicos Nacionales. La ICSU no permitirá que ninguna de sus actividades sea distorsionada por consideraciones o acciones de naturaleza política.”

8. La Asamblea General de IMU espera que el Comité Ejecutivo desarrolle una propuesta de un mecanismo para involucrar miembros de los Comités de Matemáticas, que no están en el Comité Ejecutivo, en la selección de planchas para futuras elecciones. Dicha propuesta deberá ser presentada en la Asamblea General del 2006.
9. La Asamblea General propone que los lineamientos para recibir apoyo de la IMU para coloquios se desarrollen y estén disponibles en el sitio internet de IMU. Esos escasos fondos deberán dedicarse principalmente a apoyar matemáticos del países en desarrollo y conferencias internacionales de alta calidad que tengan lugar en esos países.

Ragni Piene de Noruega hizo una breve presentación del premio Abel, establecido por la Academia Noruega de Ciencias y Letras este año y que comenzará a ser otorgado anualmente a partir de 2003. Más información en [www.math.uio.no/abel](http://www.math.uio.no/abel).

EDUARDO LIMA DE SÁ  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR  
VENEZUELA

## LIBROS

*The Honors Class: Hilbert's Problems and Their Solvers*

Benjamin H. Yandell, A K Peters Ltd., 2002. ISBN: 1-56881-141-1

**La Clase de Honores: Los Problemas de Hilbert y Quienes los Resolvieron**, por Benjamin H. Yandell

Reseñado por Argimiro Arratia

En el año 1900, David Hilbert dio una charla invitada en el Segundo Congreso Internacional de Matemáticas, celebrado en París, titulada “Problemas Matemáticos”. En su charla, Hilbert presentó una lista de problemas extraídos de diversas ramas de la matemática que, según su parecer, sus soluciones significarían un gran avance para la ciencia. El reto de Hilbert fue tomado muy seriamente; los 23 problemas de su lista fueron objeto de culto a nivel internacional y marcaron el estilo de la investigación matemática durante todo el siglo XX.

Luego de más de cien años de aquella charla magistral de Hilbert, ¿qué pasó? Sabemos que de los 23 problemas, sólo tres aún no han sido resueltos, el más notorio de los no resueltos es la Hipótesis de Riemann; cuatro de los problemas eran programas de investigación que todavía siguen motivando mucha investigación pero que va más allá de lo originalmente exigido por Hilbert, y el resto de los problemas fueron resueltos de manera definitiva. ¿Cuáles fueron las respuestas? ¿Quiénes los resolvieron? ¿Quiénes se hicieron merecedores del calificativo que Hermann Weyl acuñó para aquel que lograra resolver uno de esos problemas, a saber, el ser miembro de *la clase de honores* de la comunidad matemática?

La obra de Benjamin Yandell, *The Honors Class: Hilbert's Problems and Their Solvers*, contiene las respuestas a todas estas incógnitas. Yandell es un licenciado en matemáticas de Stanford, luego convertido a poeta, y creo que gracias a esta última cualidad del autor el libro se lee como una muy emocionante y amena novela. Una novela científica, muy al estilo de Julio Verne, donde entre aventura y aventura de quienes resolvieron parcial o totalmente los problemas de Hilbert, se intercalan largos pasajes que explican los tecnicismos matemáticos involucrados en sus soluciones. No es este libro un simple compendio de los problemas y quienes les dieron solución, sino es más bien la Historia de la Matemática del Siglo XX a través de los problemas de Hilbert, donde su autor va más allá de recopilar datos esparcidos en otros libros y revistas, a indagar en fuentes inéditas y entrevistar a los actores que aún viven o a familiares de los actores de este importante pedazo de historia. Es por todo esto que aprecio este

libro como una importante contribución para la comprensión de la matemática moderna y recomendando ampliamente su lectura.

En las siguientes páginas presento el contenido de los problemas de Hilbert, indico (en negritas) los nombres de quienes los resolvieron o quienes hicieron una contribución significativa a la solución e incluyo alguna anécdota relevante al problema. Todos los datos los extraje directamente del libro de Yandell, y espero de esta manera dar una mejor idea al lector de lo que va a aprender con la lectura de esta magnífica obra.

### Los problemas y los miembros de la clase de honores

**1. Resolver la Hipótesis del Continuo de Cantor.** La Hipótesis del Continuo (HC) es la afirmación siguiente: no existe un conjunto de cardinalidad estrictamente mayor que la cardinalidad del conjunto numerable y estrictamente menor que la cardinalidad del continuo. En 1939 **Kurt Gödel** demostró que la negación de HC no se puede tener como consecuencia de los axiomas de la teoría de conjuntos de Zermelo y Fraenkel (ZF). En 1963 **Paul Cohen** demostró que HC no se puede tener como consecuencia de ZF. En conclusión HC es *independiente* de ZF. Paul Cohen recibió la medalla Fields en su edición de 1966 por la técnica que desarrolló para demostrar la independencia de HC.

**2. Establecer la Consistencia de los Axiomas para la Aritmética utilizando métodos constructivos<sup>1</sup>.** Resuelto por **Kurt Gödel** en 1930: no es posible demostrar la consistencia de la Aritmética a partir de sus propios métodos (constructivos o finitistas) de deducción. Este resultado pasó a la historia con el título de *Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel*.

**3. Encontrar dos tetraedros con bases iguales y alturas iguales que no puedan dividirse en tetraedros congruentes y tampoco puedan combinarse con otros tetraedros congruentes para formar dos poliedros que a su vez puedan dividirse en tetraedros congruentes.**

Detrás de esta cuestión hay un problema de fundamentos de la geometría: Hilbert desea saber que axiomas son necesarios para la geometría, y en particular si el *Axioma Arquimedeano* (descrito por Yandell en la pág. 118 de forma muy clara y pedestre como “*the assertion that if I start walking in equal steps, however tiny, I will eventually reach my destination*”) es necesario para demostrar el que dos tetraedros con bases iguales y alturas iguales tienen igual volumen. Si existen dos tetraedros como los especificados por Hilbert entonces la necesidad del Axioma Arquimedeano para la geometría quedaría comprobada.

<sup>1</sup>Negritas mías: Es importante resaltar esta exigencia de Hilbert que impone una fuerte restricción en el estilo de una posible prueba de consistencia. Sin esta restricción si es posible demostrar la consistencia de la Aritmética, tal como lo hizo Gerhard Gentzen en 1936 utilizando inducción transfinita. Este detalle no lo menciona Yandell y es una de las muy pocas quejas que tengo sobre su libro.

Resuelto positivamente por **Max Dehn** en 1900, inmediatamente después de publicarse la lista de problemas de Hilbert; en consecuencia es este el primer problema de Hilbert en resolverse. La solución de Dehn la explica Yandell con lujo de detalles y diagramas en el capítulo “*In the Original*”.

4. El 4to. problema de Hilbert es esencialmente un programa de investigación sobre los fundamentos de la geometría. En particular Hilbert está interesado en “*geometrías donde la línea recta sigue siendo la distancia más corta entre dos puntos, pero los axiomas de congruencias no valen*” (Yandell pág. 138). En el fondo Hilbert desea que se investigue el concepto de distancia.

Según relata Yandell, los trabajos más relevantes a la solución de este problema fueron hechos por **Herbert Busemann** y **Aleksei Vasilevich Pogorelov**; aunque dada su naturaleza vaga, algunos investigadores entrevistados por el autor opinan que aún queda más por hacer. Sin embargo, el consenso general es que este problema, tal como lo planteó Hilbert, está resuelto y por los matemáticos mencionados.

5. *Estudiar el concepto de Lie de grupo continuo de transformaciones sin asumir la diferenciabilidad de las funciones que definen el grupo.* Este problema es relevante también a los fundamentos de la geometría. Escribe Hilbert (Yandell pág. 400): “Es bien sabido que Lie, con el auxilio del concepto de grupo continuo de transformaciones, ha establecido un sistema de axiomas para la geometría y [...] ha probado que este sistema es suficiente [...]. Pero como Lie asume [...] que las funciones que definen su grupo son diferenciables, queda aún por determinar si la suposición de la diferenciabilidad en conexión con [la suficiencia] de los axiomas de la geometría es inevitable [...]”.

Yandell explica (pág. 144) muy apropiadamente la razón por la que, si tomamos literalmente los detalles técnicos que acompañan el enunciado de este problema, lo preguntado por Hilbert es falso; en consecuencia, por consenso general, lo que la comunidad matemática asumió como el problema 5to. de Hilbert es en términos simples y modernos la cuestión de *si todo grupo local euclídeo es un grupo de Lie*.

La respuesta positiva a este problema apareció en dos artículos publicados en el *Annals of Mathematics* de 1952; uno por **Andrew Gleason**, y otro por **Deane Montgomery** y **Leo Zippin**.

6. *Axiomatizar las ciencias físicas.* Más específicamente Hilbert pide investigar los fundamentos de “*aquellas ciencias físicas en las que la matemática juega un papel importante; en el primer nivel están la teoría de probabilidades y la mecánica*”.

Este es realmente un programa de investigación, que aún no ha sido del todo resuelto y en el cual han participado muchos investigadores. El primer paso en este programa lo dio **Andrei Nikolaevich Kolmogorov** en 1933 cuando presentó sus axiomas para las probabilidades.

7. Establecer la irracionalidad y trascendencia de ciertos números (e.g.  $2^{\sqrt{2}}$  y  $e^{\pi}$ ). Resuelto por: **A. O. Gelfond**, **Theodor Schneider** y **Carl Ludwig Siegel**. En el capítulo sobre este problema, Yandell da una magnífica explicación de la trascendencia de números de Liouville como

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10^{10}} + \frac{1}{10^{10^{10}}} + \frac{1}{10^{10^{10^{10}}}}$$

que puede ser comprendida por estudiantes del último año de bachillerato.

8. Resolver ciertos problemas sobre los números primos: la Hipótesis de Riemann sobre los ceros de la función zeta y la Conjetura de Goldbach. Ambos problemas siguen sin resolverse.

9. Demostrar la Ley Más General de Reciprocidad en cualquier Cuerpo Numérico. Este problema fue resuelto por **Emil Artin** en 1927, quien ya en 1923 había conjeturado una ley general de reciprocidad y probado unos casos particulares, inspirado en el importante trabajo de clasificación de cuerpos del japonés **Takagi**. Ese mismo año 1927, Artin (con 29 años de edad), publicó también su solución al problema 17 de Hilbert, lo cual lo consagra como el único miembro de esta clase de honores en resolver dos problemas de Hilbert en su totalidad.

10. Determinar si cualquier ecuación diofántica puede resolverse de manera algorítmica. Resuelto por **Yuri Matiyasevich** en 1970 basado en trabajos relacionados con este problema por **Julia Robinson** y **Martin Davis**, y en menor medida por **Hilary Putnam**. La respuesta es que no todas las ecuaciones diofánticas son solubles algorítmicamente.

11. En palabras de Kaplansky (Yandell pág. 247) “el undécimo problema de Hilbert es sencillamente esto: clasificar formas cuadráticas sobre cuerpos numéricos algebraicos”. Aparentemente Hilbert deseaba extender el trabajo de Minkowski sobre formas cuadráticas con coeficientes racionales a cualquier cuerpo algebraico, y esto lo logró **Helmut Hasse** en 1923.

12. Yandell (pág. 256) nos resume el problema 12 de Hilbert así: “Hallar funciones analíticas que generen todas las extensiones finitas abelianas de cualquier cuerpo numérico algebraico”. Tenemos entonces aquí otro programa de investigación (y no un único problema) ya que la solución depende del cuerpo algebraico particular con que se arranque. En este caso no encontramos en el libro un nombre o algunos nombres a quien atribuir la respuesta a esta propuesta de Hilbert, sino más bien el nombre de una teoría, producto de un colectivo y aún fructífera en resultados, donde se enmarca esta: la Teoría de los Cuerpos de Clases.

13. Otra vez prefiero la presentación concisa de Yandell a la original del problema 13, y es ésta (pág. 354): Establecer la existencia de funciones continuas

que son inherentemente de tres variables y que no pueden ser representadas como superposiciones de funciones continuas de dos variables.

Yandell dedica unas 30 páginas de su libro para contarnos la historia del principal autor de la solución de este problema, y aquí nos encontramos con una de las biografías más emocionantes e intelectualmente increíbles de los miembros de la “clase de honores”; se trata de la vida de **Kolmogorov**.

En 1956, Kolmogorov, ya un matemático de 53 años con una gran reputación, demostró que cualquier función continua en cualquier número de variables puede construirse utilizando funciones continuas de tres variables y mediante un número finito de sustituciones. Entonces, en 1957, **Vladimir Igorevich Arnold**, estudiante de Kolmogorov y con 19 años de edad, demostró que dos variables son suficientes completando así la solución al problema 13. Pero ese mismo año de 1957, Kolmogorov volvió sobre sus pasos y demostró una versión más fuerte de la solución conocida.

**14.** *Establecer la finitud de ciertos sistemas completos de funciones.* Específicamente, Hilbert está interesado en las funciones racionales, las cuales forman un anillo, y lo que desea saber es si este anillo tiene una base finita.

Resuelto por **Masayoshi Nagata** en 1959 en forma negativa produciendo un contraejemplo.

**15.** El título del problema 15 de Hilbert es: “*Fundamentar Rigurosamente el Cálculo Enumerativo de Schubert*”. Hermann Schubert (1848–1911) había diseñado un método simbólico para manipular curvas y superficies algebraicas que le permitía responder preguntas numéricas del siguiente estilo: ¿Cuántas rectas intersectan cuatro rectas dadas en el espacio tridimensional? Hilbert deseaba una axiomatización de este Cálculo Enumerativo de Schubert y una demostración formal de su correctitud, por lo que, en un sentido amplio, es éste otro problema fundacional. Los primeros grandes pasos hacia una fundamentación rigurosa del cálculo de Schubert fueron dados por **Bartel Leendert van der Waerden** en 1930. Le sigue **André Weil** en 1946 con la publicación de su *Fundamentos de la Geometría Algebraica* y luego una larga lista de investigadores que con sus trabajos contribuyeron con una respuesta considerada definitiva en 1960.

**16.** En el problema 16 Hilbert pide *una descripción cualitativa (pero rigurosa) de las posibles formas que pueden tener las curvas y superficies correspondientes a ecuaciones algebraicas considerando como soluciones sólo números reales* (Yandell pág. 275).

Este es uno de los tres problemas considerados aún no resueltos completamente (los otros dos son el 6 y el 8), a pesar de la larga lista de matemáticos que intentaron resolverlo comenzando con el mismo Hilbert.<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Recientemente apareció un artículo en el *Bull. of the AMS*, vol. 39, April 2002 por Y. Ilyashenko, titulado “Centennial History of Hilbert 16th Problem”, que tal vez constituye el

**17.** En el problema 17, Hilbert pide, esencialmente, *demostrar que toda forma definida se puede expresar como una suma de cuadrados perfectos de funciones racionales*. (Un polinomio con coeficientes reales tal que nunca adquiere valores negativos para cualquier evaluación real de sus variables es una forma definida). Como ya indiqué antes, este problema fue resuelto positivamente por **Emil Artin** en 1927. Es importante notar que la demostración de Artin es existencial: dada una forma definida, demuestra que existe alguna suma de cuadrados de funciones racionales que la expresa, pero no dice cómo construir esa suma. En 1957 **Georg Kreisel** exhibió un método para construir la deseada suma de funciones racionales utilizando el Análisis No-estandar de Abraham Robinson. Artin tuvo conocimiento de esta demostración no-estandar del problema 17 y comentó al respecto (Yandell pág. 266): “*prefiero una prueba clara de existencia a una construcción con  $2^{2^{100}}$  pasos*”.<sup>3</sup>

**18.** El problema 18 consta de tres partes, las cuales resume muy bien Yandell en su libro de la siguiente manera:

- (i) Determinar si el número de grupos cristalográficos en los espacios euclídeos de grandes dimensiones es finito.
- (ii) Determinar si se puede llenar el espacio con regiones fundamentales idénticas que no estén asociadas con un grupo cristalográfico.
- (iii) Determinar la manera más eficiente de llenar el espacio con varios sólidos regulares.

La primera parte fue resuelta por **Ludwig Bieberbach** en 1910. La segunda parte fue respondida afirmativamente por **K. Reinhardt** en 1928, quien presentó un ejemplo en tres dimensiones. La última parte tiene una respuesta reciente elaborada por **Thomas Hale**, que aún parece estar en revisión dada su longitud: un artículo de 250 páginas. Un resumen de este trabajo, escrito por el mismo Hale, apareció en el *Notices* de la AMS en 2000.

**19.** En el problema 19 Hilbert pregunta: “*¿Son las soluciones de problemas regulares en el cálculo de variaciones necesariamente analíticas?*”. Yandell explica (págs. 373-8) que dada la generalidad de la terminología utilizada por Hilbert, este problema se presta para varias interpretaciones. Sin embargo, la interpretación que prevaleció fue: *¿Son las soluciones que admiten las ecuaciones diferenciales parciales elípticas únicamente analíticas?* Aún así, existen diversas variaciones de este problema dependiendo, por ejemplo, del número de ecuaciones o de variables involucradas; por lo tanto la lista de quienes contribuyeron en la solución es numerosa. Los primeros pasos hacia la solución se

---

documento más actualizado hasta este momento sobre el *status* de este problema.

<sup>3</sup>En defensa del Análisis No-estandar he de indicar que la demostración a la Robinson-Kreisel del problema 17 ha sido preferida en textos como el *Modern Algebra* de Jacobson.



le atribuyen al ruso **Sergey Natanovich Bernstein** con una tesis presentada en 1904 en la Sorbona. Le siguen **L. Lichtenstein** en 1912, **E. Hopf** en 1929, **Leray-Schauder** (1934), **Petrovsky** (1939), **Caccioppoli** (1934, y más tarde en 1950-51), **Morrey** (1958), **Ennio De Giorgi** y **John Nash** con resultados similares pero independientes en 1958.

**20.** Muy vinculado al problema anterior es el problema 20 donde Hilbert pregunta: “¿Tiene solución cualquier problema regular del cálculo de variaciones?”. Y al igual que el problema 19, la generalidad de este problema lo convierte en un programa de investigación en el que participaron incontables investigadores, siendo **S. Bernstein** otra vez quien dio los primeros pasos fundamentales.

**21.** El problema 21 fue originalmente planteado por Riemann de manera implícita en uno de sus escritos y Hilbert, partiendo de esos trabajos de Riemann, pide esencialmente resolver lo siguiente: *Demostrar que siempre existe un sistema de ecuaciones diferenciales de la clase de Fuchs, con un conjunto de puntos singulares y grupo monodrómico preestablecidos.* La historia de la solución de este problema es un ilustre ejemplo de lo humano que es errar. En 1908 **Josip Plemelj** presentó una respuesta afirmativa que superó en simplicidad y generalidad a la respuesta parcial que el mismo Hilbert había dado en 1905, valiéndole todos los honores posibles en su Slovenia natal y “*muriendo en 1967 convencido de haber resuelto el problema*”. Con esta frase, que bien construye el suspenso en el lector, Yandell (pág. 367) nos anuncia un inminente desastre. En 1989 el ruso **Andrei Bolibruch**, luego de varios años trabajando en una generalización más moderna y más completa de los resultados de Plemelj (ya se habían reconocido algunos “huecos” en la prueba de Plemelj) encontró un contraejemplo. No sólo la respuesta de Plemelj estaba incompleta sino también era falsa, y esta falsa respuesta pasó desapercibida 81 años. A manera de epílogo de este capítulo Yandell presenta una comunicación personal que recibiera de Bolibruch, donde el matemático se pregunta cuántos resultados importantes se habrán demostrado basándose en la falsa respuesta al problema 21 de Hilbert (y que por lo tanto quedan actualmente invalidados). Bolibruch cita uno en detalle.

**22.** Hilbert titula su Problema 22 así: *Uniformización de Relaciones Analíticas Mediante Funciones Automórficas* (pág. 417). Yandell nos explica (pág. 324): “Hilbert desea demostrar que existe una parametrización que usa funciones automórficas de cualquier superficie definida por *cualquier relación analítica y no algebraica*. En particular, él desea asegurarse que *todos los puntos regulares de un cuerpo analítico son alcanzables y representables.*”

Este problema es planteado por Hilbert como una petición a extender los trabajos de **Jules Henri Poincaré** concernientes a casos particulares de este tipo de representaciones. Y es precisamente **Poincaré** quien en 1907, a la edad de 53 años, resuelve esta cuestión en toda su generalidad, “utilizando un proceso

exhaustivo y un espacio de cubrimiento universal (proveniente de la topología algebraica)” (pág. 324).

El problema fue resuelto también, independientemente y en el mismo año, por **Paul Koebe** de la Universidad de Göttingen. Sobre **Koebe**, Yandell nos presenta una corta y más bien oscura biografía, donde encontramos que Koebe “...tenía reputación de ladrón de ideas de matemáticos más jóvenes” (pág. 298); y más adelante se nos revela que el joven Courant fue uno de los robados.

**23.** El último problema de la lista es otro programa de investigación con un enunciado un poco vago. Hilbert comienza así: *Extender el Desarrollo de los Métodos del Cálculo de Variaciones*, y luego continúa con un largo ensayo donde justifica la necesidad de desarrollar las técnicas que se conocían entonces para resolver ciertas ecuaciones. Yandell opina (pág. 381): “No tiene sentido hablar de este problema como resuelto, mucho menos hablar de alguien en específico que lo haya resuelto.” Esencialmente Hilbert pide trabajar en el Cálculo de Variaciones y lo importante es que la comunidad matemática respondió afirmativamente a esta sugerencia.

ARGIMIRO ARRATIA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR  
VENEZUELA

### **AGRADECIMIENTOS**

Agradecemos la colaboración prestada por las siguientes personas en la elaboración de este volumen IX del Boletín de la AMV:

**Diómedes Bárcenas, Verónica Becher, Carlos Di Prisco,  
Luis Gómez Sánchez, Neptalí Romero y Judith Vanegas.**