

Una aplicación del teorema chino del resto en la Cronología

Francisco Rivero

Para muchas personas, entre las cuales me incluyo, el calendario ha sido siempre un gran misterio. Al mirar un almanaque colgado en la pared, con sus doce meses invariables, sentimos que algún desconocido ha hecho un plan anual para nosotros, en donde se debe viajar en el tiempo siguiendo una secuencia de meses, días de la semana, fechas religiosas, . . . etc, prefijada de antemano por algún ser superior con poderes desconocidos . . .

Como matemático me pregunto: ¿Porqué es tan complicado el almanaque? ¿De dónde salieron esos nombres para los meses? ¿Porqué se tiene un calendario distinto para cada año? . . . En esta breve nota, trataremos algunos aspectos relacionados con el calendario que, por supuesto, develarán algunos de los misterios planteados arriba. También haremos una incursión en el pasado para enterarnos de otros calendarios anteriores al nuestro, los cuales han pasado de moda pero son de interés para aquellos estudiosos de la historia y la astronomía. Curiosamente, un teorema de la teoría de números, será la clave mágica que permita conocer la relación entre los viejos sistemas de cronología.

El Calendario Gregoriano

El origen de nuestro calendario actual se encuentra en el **Calendario Juliano**, llamado así por Julio César, quien participó activamente en el diseño de éste. En dicho calendario cada año constaba de 365 días y cada cuatro años había un año bisiesto de 366 días. El calendario de 12 meses comenzaba en el mes de Marzo y finalizaba en Febrero. El nombre y duración de los meses eran los siguientes:

Nombre del mes	No. de días	Nombre en Latin
Marzo	30	Martius
Abril	30	Aprilis
Mayo	31	Maius
Junio	30	Junius
Quinto	31	Quintilis
Sexto	31	Sextilis
Septiembre	30	Septembris
Octubre	31	Octobris
Noviembre	30	Novembris
Diciembre	31	Decembris
Enero	31	Januaris
Febrero	28	Februarius

Durante el tiempo de César el mes quinto cambió de nombre por Julio, en honor a este Emperador. Más tarde, el mismo Julio César decidió que el año debería comenzar en Enero. De esta manera quedó organizado el Calendario sin sufrir ninguna modificación hasta la reforma del Papa **Gregorio XIII** en 1582.

Desde la época de los reyes de Roma, pasando por el Imperio, los años se numeraban de acuerdo al período de cada rey o emperador. Con un nuevo gobernante se iniciaba un nuevo ciclo y con él se comenzaba a contar desde el uno. Esto se modificó con el triunfo del Cristianismo, cuando se comenzó a numerarlos en forma diferente. A partir de entonces, el año 1 fué el nacimiento de Cristo y el día de Navidad el primer día de la era Cristiana, luego los años se cuentan en sucesión creciente, partiendo desde este inicio. Esta reforma fué hecha en el 533 d.c. durante el período del Emperador Dionisio Exigus.

Una de las motivaciones que han tenido todos los pueblos en el momento de establecer un Calendario, es la de ubicar correctamente las fiestas religiosas. Así observamos que en el Calendario Cristiano, el Domingo de Pascua determina las otras fechas movibles como la Ascensión y el Corpus Cristi. Durante el Concilio de Nicea en el 325 d.c. se acordó fijar esta fecha, como el primer Domingo después de luna nueva que aparezca en el Equinoccio de Primavera (21 de Marzo) o después. Si la luna nueva aparece un Domingo, entonces el Domingo de Pascua será el domingo siguiente.

Si bien el Calendario Juliano funcionó bien durante algunos siglos, la celebración de una Semana Santa a fines del siglo XVI, en donde el Domingo de Pascua correspondió al 11 de Marzo, hizo pensar a muchos que este Calendario estaba lejos de ser perfecto. Veamos el porque de semejante error.

El **año Astronómico**, una revolución completa de la tierra alrededor del sol, es de 365 días, 6 horas, 9 minutos y 9.5 segundos. Sin embargo el año visible o **Año Tropical**, período entre dos equinoccios de Primavera, es más corto: 365 días, 5 horas, 48 minutos y 46.43 segundos.

El Calendario Juliano suponía que el año tenía 365 días y un cuarto, lo cual excede en 11 minutos y 14 segundos al Año Tropical. Como consecuencia de esto, se comete un error de un día cada 128 años. Esto explica el desfase entre la celebración de Domingo de Pascua y el Calendario Juliano.

A fin de corregir este error, el Papa Gregorio XIII introdujo una reforma en el calendario, mediante la cual se eliminaron 10 días de la historia. Se decidió que el día siguiente al 4 de Octubre de 1582, fuese el 15 de Octubre. Además se redujeron los años bisiestos mediante la siguiente convención. Los años bisiestos seculares (divisibles por 100) serán sólo aquellos divisibles por 400. Así por ejemplo 1800 y 1900 no son bisiestos, pero 2000 será bisiesto. Esta reforma del Calendario Juliano se conoce con el nombre de **Calendario Gregoriano** y es el calendario que se ha venido usando hasta el presente.

El periodo juliano

Una de las medidas más usadas en la cronología histórica es la de los **Días Julianos**. Los Días Julianos tienen la misma duración que los días solares, sin embargo estos se cuentan a partir del primero de Enero del 4713 a.c., el cual es el día juliano 1, y de allí en adelante se numeran los días en sucesión creciente. Este sistema fue ideado por **Joseph Justus Scaliger** de Leyden, con la finalidad de tener un sistema único de medición del tiempo, compatible con las antiguas cronologías. El mismo apareció por primera vez en su obra " *De emendatione temporum*" (Paris 1583).

Estos días julianos se agrupan en periodos de 7980 años. Cada uno de estos periodos se denomina **Ciclo Juliano o Periodo Juliano** . La razón para elegir semejante número, la veremos a continuación.

Tenemos que $7980 = 28 \times 19 \times 15$ y cada uno de estos factores tiene un significado muy especial dentro de los calendarios de distintas cronologías.

1. Ciclo Solar

El número 28 corresponde al llamado **Ciclo Solar** de 28 años. Este es el ciclo más pequeño en el cual los días de la semana y las fechas del calendario se repiten. El primer año de un ciclo solar es aquel en que el primero de Enero es Lunes. Por ejemplo el año 1560 tiene año solar 1. ¿Porqué se repiten los almanaques cada 28 años?. Pues sencillamente un año normal de 365 días contiene 52 semanas más un día, luego cada 7 años (normales) se repiten las fechas del almanaque en los mismos días de la semana. Pero, cuidado!, cada cuatro años hay uno bisiesto, de 366 días lo cual hace que en realidad el ciclo sea de $4 \times 7 = 28$ días.

2. Ciclo Lunar

El ciclo lunar o ciclo metónico, es un periodo igual a 19 años solares. La razón de esto se debe al astrónomo griego Meton, siglo 5 d.c., quien descubrió que 19 años solares son iguales a 235 meses lunares.

El **mes lunar** o **mes sinódico**, es el intervalo de tiempo entre dos conjunciones consecutivas del sol y la luna (4 fases lunares). Este tiene una duración de 29 días, 12 horas y 44 minutos.

En la Iglesia Cristiana hubo necesidad de introducir el ciclo lunar dentro del Calendario, debido a la determinación del Domingo de Pascua, el cual depende de la luna llena, como ya hemos explicado. Los años del ciclo metónico se llaman **años dorados**.

El primer año de un ciclo es aquel en que las fases lunares del mes de Enero de dicho año comienzan el 24 de Diciembre.

Asi por ejemplo en el año 1 de la era cristiana se inició un ciclo metónico. Luego el año 1 d.c. tiene número dorado 1, el año 2 d.c. tiene número dorado 2 , ... etc. Luego el año 20 tiene número de oro 1, y asi sucesivamente. La regla para calcular el número de oro t , de un año x cualquiera es:

$$t \equiv x + 1 \pmod{19}$$

Por ejemplo 1994 tiene número de oro 19, pues

$$1994 + 1 = 1995 \equiv 19 \pmod{19}.$$

Este sistema fué introducido por el Emperador Dionisio Exigus en el año 532 d.c. y este año tiene número dorado 1.

3. Ciclo de Indicción

Finalmente, el número 15 corresponde a otro ciclo, el cual no tiene nada que ver con astronomía. Se trata de un ciclo fiscal del Imperio Romano que constaba de 15 años y se llama la **indicción**. Cada 15 años se hacía una valuación de las propiedades de los contribuyentes con el fin de determinar el impuesto a pagar. Este ciclo fué introducido por el Emperador Constantino en el año 313 d.c. correspondiendo a este año el primer año de dicho ciclo.

La idea de Scaliger era usar un sistema de cronología que incluyera todos estos ciclos. Esto permitiría calcular fácilmente una fecha determinada al pasar de un sistema a otro. El problema entonces era escoger una fecha apropiada para iniciar la cuenta de los años julianos. Se necesitaba un año x de la historia, tal que en ese año se diera inicio a los tres ciclos. Esto es, x debe tener

$$\begin{array}{rcl} \text{Año solar} & = & 1 \\ \text{Año dorado} & = & 1 \\ \text{Año de indicción} & = & 1 \end{array}$$

Usando congruencias, se origina el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x \equiv 1560 \pmod{28} \\ x \equiv 532 \pmod{19} \\ x \equiv 313 \pmod{15} \end{array} \right.$$

Reduciendo esto se tiene

$$\left\{ \begin{array}{l} x \equiv 20 \pmod{28} \\ x \equiv 0 \pmod{19} \\ x \equiv 13 \pmod{15} \end{array} \right.$$

Veamos como el Algebra resuelve este problema.

Teorema chino del resto

El siguiente teorema es uno de los más usados en la teoría de números. Su origen se remonta a la antigua china en donde eran conocidas algunas de sus aplicaciones. Se descubrió en el siglo 12 de nuestra era. Existen muchas versiones del mismo, dependiendo del nivel de generalización utilizado. El enunciado y la demostración de la versión siguiente, se puede encontrar en cualquier texto de teoría de números.

Teorema 1 (*Teorema Chino del resto*)

Sean m_1, \dots, m_n enteros positivos, primos relativos por pares. Entonces si a_1, \dots, a_n son enteros cualesquiera, el sistema

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ \vdots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

posee solución única módulo $m = m_1 \dots m_n$.

Veamos como el teorema chino del resto resuelve nuestro problema. En primer lugar, usaremos la notación

$$(a, b) = \text{máximo común divisor entre } a \text{ y } b.$$

notemos que $(28, 27) = 1$, $(28, 15) = 1$ y $(15, 19) = 1$. Luego el sistema anterior posee solución, y por lo tanto es posible hallar una fecha de inicio del periodo juliano con las condiciones antes establecidas.

A fin de determinar el valor de x , comenzaremos por usar la primera ecuación. Luego

$$x = 20 + 28k$$

con k entero.

Usando la segunda ecuación nos queda

$$\begin{aligned} 20 + 28k &\equiv 0 \pmod{19} \\ 1 + 9k &\equiv 0 \pmod{19} \\ 9k &\equiv 18 \pmod{19} \end{aligned}$$

de donde

$$k \equiv 2 \pmod{19}$$

Luego

$$k = 2 + 19s$$

y por lo tanto volviendo a x en la última ecuación tenemos

$$76 + 532s \equiv 13 \pmod{15}$$

$$1 + 7s \equiv 13 \pmod{15}$$

luego, $7s \equiv 12 \pmod{15}$, de donde $s \equiv 6 \pmod{15}$. Por lo tanto $s = 6 + 15t$. Nuevamente, si reemplazamos este valor en la expresión para x nos da

$$x = 76 + 532(6 + 15t) = 326 + 7980t$$

Luego la solución viene dada por

$$x \equiv 3268 \pmod{7980}$$

Sin embargo, descartamos el año 3268 por ser del futuro y buscamos el año y en que se inició el periodo juliano anterior. Esto es

$$y = 3268 - 7980 = -4712$$

En el calendario gregoriano, el año -4712 corresponde al 4713 a.c. (no hay año 0) y este se toma como el año 1 juliano.

Ejemplo. Conociendo el año juliano de un año cualquiera, podemos calcular su año solar, dorado y de indicción; basta tomar los restos de la división del número entre 28, 19 y 15 respectivamente. Por ejemplo para buscar el año juliano de 1993, el cual llamaremos x , hacemos

$$x = 4713 + 1993 = 6706$$

Luego dividimos a 6706 entre 28, 19 y 15 respectivamente para obtener los restos que nos dan toda la información. Por lo tanto

$$\begin{array}{rcl} \text{Año solar de 1993} & = & 14 \\ \text{Año dorado de 1993} & = & 18 \\ \text{Año de indicción de 1993} & = & 1 \end{array}$$

Referencias

- [1] R. Lane and S. Everett *The origin of the julian period* Amer. J. Physics 49(7), July 1981.
- [2] C. H. Cleminshaw *The julian period* The Griffith Observer April 1975.
- [3] R. Lane and S. Everett *J. J. Scaliger and the julian period* The Griffith Observer, May 1981.