MONOTONIA FUNCȚIILOR DEFINITE PE R^n APLICATĂ LA INDICELE PREȚURILOR

Nicoleta Breaz, Daniel Breaz

Abstract. We consider the factorial index prices obtained by MDF method as a function depending on more variables and we show that this function satisfy the monotonicity with respect to the prices.

Keywords. Indice, indice al prețurilor, indice unitar, funcție de mai multe variabile, monotonie.

Una dintre proprietățile pe care ar fi de dorit ca un indice al prețurilor să le satisfacă este proprietatea de monotonie.

Referitor la un indice unitar al prețului, de forma

$$I = \frac{p(k)}{p(j)} \qquad (1)$$

unde k şi j sunt două momente de timp, iar p(k) şi p(j) prețurile unui anumit produs, corespunzătoare celor două momente de timp, sunt evidente afirmațiile:

a) I=I(p(j), p(k)) este o funcție strict crescătoare în raport cu argumentul p(k);
b) I=I(p(j), p(k)) este o funcție strict descrescătoare în raport cu argumentul p(j).

Considerând cazul a n produse nu vom mai vorbi despre un indice unitar al prețului ci despre un indice factorial al prețurilor, definit astfel:

Definiție. *Se consideră variabila* $v = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot q_i$ *valoarea coşului zilnic,* p_i *fiind prețul produsului sau serviciului „i", iar* q_i *cantitatea corespunzătoare acelui produs existentă în coş. Dacă* $I_v^{k/j} = \frac{v(k)}{v(j)}$ *reprezintă variația totală a valorii v, de la momentul de timp j la momentul k, se va numi* *<u>indice factorial al prețurilor (indice al prețurilor)</u>* $I_{v/p}^{k/j}$ *acea parte din* $I_v^{k/j}$ *datorată variației prețurilor.*

Se cunosc mai multe metode de calcul al indicilor factoriali ai prețurilor nefiind încă rezolvată problema determinării unei formule care să redea fidel, cota parte din variația lui v datorată prețurilor. Ne vom opri în acest articol la metoda drumului factorilor (MDF).

Conform acestei metode de calcul fundamentată în 1986 de către I. Florea şi Gh. Opriş, indicele factorial al prețurilor este dat de formulele:

$$I_{z/p}^{k/j} = \prod_{i=1}^{n} I_{z/p_i}^{k/j}$$

unde $I_{z/p_i}^{k/j} = \exp \int_{M_j M_k} \frac{q_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i q_i} dp_i$, adică $I_{z/p_i}^{k/j} = \exp \int_{M_j M_k} \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i q_i} dp_i$ (2)

unde M_jM_k reprezintă acea parte din drumul parcurs de factorii preț și cantitate în intervalul de timp (j;k) sau, geometric, arcul de curbă parametrizat de ecuațiile:

$$\begin{cases} q_i = q_i(t) \\ p_i = p_i(t) \end{cases}, t \in [0,1],\ i = \overline{1,n},$$

cuprins între punctele M_j ($p_1(j), p_2(j), \dots, p_n(j), q_1(j), q_2(j), \dots, q_n(j)$) și M_k ($p_1(k), p_2(k), \dots, p_n(k), q_1(k), q_2(k), \dots, q_n(k)$).

Se observă că forma unui astfel de drum depinde de toate situațiile de preț – cantitate intermediare celor două momente j și k. Vom considera în cele ce urmează un drum liniar între punctele M_j, M_k.

Folosind parametrizarea

$$\begin{cases} q_i = q_i(j) + t[q_i(k) - q_i(j)] = q_i(j) + t\Delta q_i \\ p_i = p_i(j) + t[p_i(k) - p_i(j)] = p_i(j) + t\Delta p_i \end{cases} \quad i = \overline{1,n},\ t \in [0,1] \qquad (3)$$

formula (2) devine:

$$I_{z/p}^{k/j} = \exp \int_0^1 \frac{\sum_{i=1}^{n} (q_i(j) + t\Delta q_i)\Delta p_i}{\sum_{i=1}^{n} (q_i(j) + t\Delta q_i)(p_i(j) + t\Delta p_i)} dp_i \qquad (4)$$

Conform cu (2) sau (4) vom putea considera indicele prețurilor ca o funcție care depinde de prețurile și cantitățile din perioada de bază j, respectiv perioada curentă k, adică:

$$\begin{aligned} &I_{z/p}^{k/j} = P(q_i(j), p_i(j), q_i(k), p_i(k)), \\ &P : \mathbf{R}_{++}^{4n} \to \mathbf{R}_{++}, \\ &\textit{unde } q_i(j) = (q_1(j), q_2(j), \dots, q_n(j)), \\ &p_i(j) = (p_1(j), p_2(j), \dots, p_n(j)) \\ &q_i(k) = (q_1(k), q_2(k), \dots, q_n(k)), \\ &p_i(k) = (p_1(k), p_2(k), \dots, p_n(k)) \end{aligned}$$

iar notația ++ se referă la numere strict pozitive.

În [1] indicele prețurilor este privit ca o astfel de funcție care trebuie să îndeplinească anumite proprietăți cu substrat economic. Aceste proprietăți diferă ca formă de la un autor la altul, unele dintre ele fiind de fapt o estimare a cerințelor firești care se impun unui indice unitar al prețului calculat după formula (1). O astfel de proprietate este și aceea de monotonie.

Proprietate. *Indicele prețurilor este strict crescător în raport cu vectorul preț din perioada curentă k şi strict descrescător în raport cu vectorul preț din perioada de bază j, adică:*

$$P(q_i(j), p_i(j), q_i(k), p_i(k)) > \\ > P(q_i(j), p_i(j), q_i(k), p_i(k')) \quad \text{dacă } p(k) > p(k') \text{ şi}$$

$$P(q_i(j), p_i(j), q_i(k), p_i(k)) < \\ < P(q_i(j), p_i(j'), q_i(k), p_i(k)) \quad \text{dacă } p(j) > p(j'), \text{ unde, de exemplu:}$$

p(k) > p(k') $\Leftrightarrow$ $p_1(k) > p_1(k')$, $p_2(k) > p_2(k')$, … , $p_n(k) > p_n(k')$.

Demonstrarea faptului că un indice al prețurilor calculat printr-o anumită metodă are proprietatea de monotonie nu este aşa cum se observă din formula (4) atât de facilă ca şi justificarea afirmațiilor a) şi b). Se va vedea că demonstrația clasică a monotoniei funcției $I_{z/p}^{k/j} = P(q_i(j), p_i(j), q_i(k), p_i(k))$ eşuează.

Demersul acestei demonstrații ar fi următorul:

Deoarece în [2] s-a arătat că un indice al prețurilor care satisface prima parte a monotoniei şi în plus este un indice reversibil în timp, (adică $I_{z/p}^{k/j} = \frac{1}{I_{z/p}^{k/j}}$, reversibilitate verificată de către (2)) satisface şi cea de-a doua parte a monotoniei, ne vom axa doar pe această parte, încercând să o demonstrăm pentru indicele (4).

Folosind ipoteza p(j) > p(j') rezultă $\Delta p_i > \Delta p_i'$, $\forall\, i = \overline{1,n}$. Putem scrie $q_i(j) + t\Delta q_i = q_i(j)(1-t) + q_i(k)t \geq 0$ pentru orice $t \in [0,1]$, deci:

$$(q_i(j) + t\Delta q_i)\Delta p_i < (q_i(j) + t\Delta q_i)\Delta p_i', \ \forall i = \overline{1,n} \qquad (5)$$

Analog, scriind $p_i(j) + t\Delta p_i = p_i(j)(1-t) + p_i(k)t$ şi $p_i(j') + t\Delta p_i' = p_i(j')(1-t) + p_i(k)t$ se obține $p_i(j) + t\Delta p_i > p_i(j') + t\Delta p_i'$, de unde rezultă

$$(q_i(j) + t\Delta q_i)(p_i(j) + t\Delta p_i) > (q_i(j) + t\Delta q_i)(p_i(j') + t\Delta p_i') \qquad (6).$$

Se observă că din (5), (6) şi proprietățile de monotonie referitoare la exponențială şi integrală, dacă ar avea loc relațiile $\begin{cases} \Delta p_i > 0 \\ \Delta p_i' > 0 \end{cases}$ $\forall\, i = \overline{1,n}$ demonstrația monotoniei indicelui (4) ar fi făcută.

Practic cele două relații au loc numai dacă pentru toate cele n produse prețul creşte de la momentul j la momentul k ceea ce nu se întâmplă întotdeauna.

Vom demonstra totuşi că indicele (4) are proprietatea de monotonie folosind derivata parțială de ordinul întâi în definirea monotoniei unei funcții din $\mathbf{R}^n$.

Propoziție. *Dacă $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ este o funcție care admite derivate parțiale în raport c fiecare variabilă şi acestea îndeplinesc relația*

$$\frac{\partial F(x_1,...,x_n)}{\partial x_i} < 0, \forall\, i = \overline{1,n}, \ \forall\, (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$$

atunci funcția F este strict descrescătoare în sensul implicației.

$$(x_1, x_2, ..., x_n) > (x_1', x_2', ..., x_n') \Rightarrow F(x_1, x_2, ..., x_n) < F(x_1', x_2', ..., x_n'),$$

unde $(x_1, x_2, ..., x_n) > (x_1', x_2', ..., x_n')$ *revine la* $x_i > x_i'$, $\forall\, i = \overline{1, n}$.

Demonstrație:

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) > (x_1', x_2', \ldots, x_n')$ implică $x_1 > x_1'$ şi avem $\dfrac{\partial F(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1} < 0$ rezultă că $f(x_1) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ unde x_2, … ,x_n sunt considerate constante, este o funcție descrescătoare, deci avem: $f(x_1) > f(x_1')$ adică $F(x_1, x_2, \ldots, x_x) < F(x_1', x_2, \ldots, x_x)$.

Deoarece $\dfrac{\partial F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_2} < 0$, $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ rezultă că

$g(x_2) = F(x_1', x_2, \ldots, x_n)$ este o funcție descrescătoare şi cum $x_2 > x_2'$ rezultă

$$F(x_1', x_2, \ldots, x_n) < F(x_1', x_2', \ldots, x_n)$$

Repetând procedeul vom putea scrie relațiile:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) < F(x_1', x_2, ..., x_n) < F(x_1', x_2', ..., x_n) < F(x_1', x_2', ..., x_n')$$

adică exact ceea ce trebuia demonstrat.

Propoziție. *Indicele factorial al prețurilor obținut prin metoda drumului liniar al factorilor este un indice monoton.*

Demonstrație:

Fie p(j) > p(j’) şi $I_{z/p}^{k/j} = \exp \displaystyle\int_0^1 \frac{\sum_{i=1}^{n} \left[q_i(j) + t\Delta q_i\right]\Delta p_i}{\sum_{i=1}^{n} \left[p_i(j) + t\Delta p_i\right]\left(q_i(j) + t\Delta q_i\right)} \cdot dt$.

Notăm

$$F(p_1(j), p_2(j), ..., p_n(j)) = \frac{\sum_{i=1}^{n} [q_i(j) + t\Delta q_i]\Delta p_i}{\sum_{i=1}^{n} [p_i(j) + t\Delta p_i](q_i(j) + t\Delta q_i)}.$$

Calculând derivata acestei funcții se obține că: $\dfrac{\partial F}{\partial p_i(j)} < 0,\ \forall i = \overline{1, n}$.

Aplicând propoziția 1 din ipoteza $(p_1(j), p_2(j), \ldots, p_n(j)) > (p_1(j'), p_2(j'), \ldots, p_n(j'))$ rezultă $F(p_1(j), p_2(j), \ldots, p_n(j)) < F(p_1(j'), p_2(j'), \ldots, p_n(j'))$ adică

$$f(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} [q_i(j) + t\Delta q_i]\Delta p_i}{\sum_{i=1}^{n} [q_i(j) + t\Delta p_i](p_i(j) + t\Delta p_i)} < \frac{\sum_{i=1}^{n} [q_i(j) + t\Delta q_i]\Delta p_i'}{\sum_{i=1}^{n} [q_i(j) + t\Delta p_i](p_i(j') + t\Delta p_i)} = g(t), \forall t \in [0,1]$$

ceea ce implică

$$\int_0^1 f(t)dt < \int_0^1 g(t)dt$$

şi încă $\exp\int_0^1 f(t)dt < \exp\int_0^1 g(t)dt$, aşadar $I_{z/p}^{k/j} < I_{z/p}^{k/j'}$.

Ținând seama şi de observațiile anterioare putem acum să afirmăm că indicele prețurilor MDF liniar este un indice monoton, în sensul dat în [1].

BIBLIOGRAFIE

[1] W., Eichorn, I., Voeller – „*Axiomatic foundation of Price Indices and Purchasing Power Parities, Price Level Measurement*”, Procedings from a Conference sponsored by Statistics Canada, Otawa, 1985.
[2] I., Florea, N., Mera – „*Unele proprietăți ale indicilor prețurilor MDF*”, Analele Universității din Oradea, Facultatea de Ştiințe Economice, 1998.
[3] I., Florea, I., Opriş – „*Metoda drumului factorilor – o nouă metodă de descompunere aritmetică a variației indicatorilor funcționali*”, Studii de calcul economic şi cibernetică economică, 1986.

Autori

Nicoleta Breaz , Daniel Breaz, “1 Decembrie 1918” University of Alba Iulia
Str. N. Iorga, No. 11-13, 510009.
Romania.
e-mail: nbreaz@uab.ro., dbreaz@uab.ro.