
Zbl 372.10023

Erdős, Paul

Some problems and results on the irrationality of the sum of infinite series. (In English)

J. Math. Sci. 10, 1-7 (1975).

In dieser Arbeit wird untersucht, unter welchen Bedingungen Lückenreihen, die man aus der harmonischen Reihe gewinnt, irrationale Zahlen darstellen. Unter diesen Lückenreihen fallen z.B. die Werte von $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ mit $s = 2, 3, 4, \ldots$: Während Euler diese Fragestellung im Falle gerader natürlicher Zahlen s im Prinzip bereits gelöst hat, erweist sich die Untersuchung für ungerade s, etwa für $s = 3$, als äußerst schwierig. Der Autor zeigt, daß man bei sehr großen Lücken zu Irrationalitätsbeweisen gelangen kann. Eine Folge $m_1 < m_2 < \ldots$ natürlicher Zahlen soll die Eigenschaft P besitzen, wenn für jede Menge S natürlicher Zahlen n_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, die der Relation $n_k \equiv 0($ mod $m_k)$ genügen, die Reihe $\sum_{n \in s} \frac{1}{n}$ eine irrationale Zahl darstellt. Der Autor zeigt, daß die Folge 2^{2^k} die Eigenschaft P besitzt. Er stellt das Problem, Folgen m_k mit der Eigenschaft P zu finden, für die $\overline{\lim}\, m_k^{1/2^k} < \infty$ gilt und die Zahlen m_k paarweise relativ prim sind. Außerdem beweist der Autor die beiden folgenden Sätze: Besteht die unendliche Menge S aus natürlichen Zahlen $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \ldots$, die $\overline{\lim}\, n_k^{1/2^k} = \infty$ und für ein positives $\varepsilon n_k > k^{1+\varepsilon}$ erfüllen, dann ist $\alpha = \sum_{n \in s} \frac{1}{n}$ irrational. Gilt zusätzlich zu den obigen Bedingungen $\overline{\lim} n_k^{1/t^k} = \infty$ für jede natürliche Zahl t, dann ist α sogar eine Liouvillesche Zahl.

R.J.Taschner

Classification:
11J81 Transcendence (general theory)
00A07 Problem books