Zbl 319.10066

Erdős, Paul; Nathanson, Melvyn B.

Oscillations of bases for the natural numbers. (In English)

Proc. Am. Math. Soc. 53, 253-258 (1975). [0002-9939]

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ heißt (asymptotische) Basis (der Ordnung 2), wenn jedes genügend große $n \in \mathbb{N}$ als (*) $n = a_i + a_j$ $(a_i, a_j \in A)$ darstellbar ist. Wenn unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ nicht in der Form (*) darstellbar sind, heißt A Nichtbasis. Eine Basis A heißt r-minimal, wenn $A \backslash F$ $(F \subseteq A)$ Basis ist, falls $|F| < r$, und $A \backslash F$ Nichtbasis ist, falls $|F| \geq r$. (Der Spezialfall $r = 1$ liefert den von *A.Stöhr* [J. Reine Angew. Math. 194, 40-65; 111-140 (1955; Zbl 066.03101)] eingeführten Minimalbasisbegriff.)

Die Verff. konstruieren für jedes r eine Klasse von r-Minimalbasen. Eine Basis A heißt $\aleph_0$-minimal, wenn $A \backslash F$ Basis ist für jede endliche Teilmenge $F \subset A$, aber für keine unendliche Teilmenge $F \subset A$.

Dann konstruieren Verff. eine Klasse von $\aleph_0$-Minimalbasen. Weiter wird gezeigt (Satz 3): Es gibt keine Basis $A = \{a_i\}$, so daß $A \backslash \{a_u\}_{u \in U}$ Basis ist, falls U die (natürliche) Dichte 0 hat, und Nichtbasis ist, falls U positive Dichte hat. Dann werden entsprechende Betrachtungen für Nichtbasen durchgeführt: Eine Nichtbasis A heißt s-maximal, wenn $A \cup G$ $(G \subset \mathbb{N})$ Nichtbasis ist für $|G \backslash A| < s$, aber Basis für $|G \backslash A| \geq s$.

Es wird dann für jedes s eine Klasse von s-maximalen Nichtbasen konstruiert. Seien $A, F, G \subset \mathbb{N}$ mit $|F| < \infty$, $|G| < \infty$ und $F \subset A$ und $G \cap A = \emptyset$. Dann heißt A (r, s)-Basis, wenn (i) $A \backslash F$ Basis ist genau dann, wenn $|F| < r$, und (ii) wenn für $|F| = r$ gilt $(A \backslash F) \cup G$ ist Nichtbasis genau dann, wenn $|G| < s$.

Die Verff. konstruieren eine Klasse von (r, s)-Basen. Analog werden dann (r, s)-Nichtbasen definiert und untersucht.

E.Härtter

Classification:
11B13 Additive bases

©European Mathematical Society & FIZ Karlruhe & Springer-Verlag