
Zbl 308.05004

Deza, M.; Erdős, Paul

Extension de quelques théorèmes sur les densités de séries d'éléments de N a des séries de sous-ensembles finis de N.

Extension of some theorems on the density of series of elements of N to series of finite subsets of N. (In French)

Discrete Math. 12, 295-308 (1975). [0012-365X]

Pour une série $A = \{A_k\}$ de sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$, on introduit les densités

$$\sigma(A) = \inf_{m \le n} A(m)/2^m, \quad d_{inf}(A) = \liminf_{n\to\infty} A(n)/2^n,$$

où $A(m)$ est le nombre d'ensembles $A_k \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$. L'ensemble de toutes les parties de $\{1, 2, \dots, n\}$ devient, pour les opérations $a \cup b$, $a \cap b$, $a * b = a \cup b - a \cap b$, un semi-groupe fini $N^{\cup}$, $N^{\cap}$ ou un groupe N^* respectivement. Pour $N^{\cup}$, $N^{\cap}$, on démontre l'analogue du théorème de Erdős-Landau

$$\sigma(A + B) \ge \sigma(A)(1 + (2\lambda)^{-1}(1 - \sigma(A)),$$

où B est une base de $\mathbb{N}$ d'ordre moyen λ. On démontre pour $N^{\cup}$, $N^{\cap}$, N^* l'analogue du théorème de Schnirelmann (si $\sigma(A)+\sigma(B) > 1$, alors $\sigma(A+B) = 1$) et les inégalités $\lambda \le 2h$, où h est l'ordre de base. On introduit le rapport de divisibilité des ensembles $a \mid b$, si b est une continuation de a. On démontre l'analogue du théorème de Davenport- Erdős: si $d_{inf}(A) > 0$, alors il existe une sous-série infinie $\{A_{k_r}\}$, où $A_{k_r} \mid A_{k_{r+1}}$, pour $r = 1, 2, \dots$ On envisage aussi pour $N^{\cup}$, $N^{\cap}$, N^* les analogues de l'inégalité de Rohrbach: $\sqrt{2n} \le g(n) \le 2\sqrt{n}$, où $g(n) = \min k$ pour les ensembles $\{a_1 < \dots < a_k\} \subseteq \{0, 1, 2, \dots, n\}$ tels que, pour tout $m \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, on a $m = a_i + a_j$.

Classification:
05A05 Combinatorial choice problems
20M99 Semigroups