
Zbl 186.08004

Erdős, Pál; Sarközi, A.; Szemeredi, E.

On the divisibility properties of sequences of integers. II (In English)

Acta Arith. 14, 1-12 (1968). [0065-1036]

Es bezeichne A eine zunehmende Folge von ganzrationalen Zahlen a_i und man setze $A(x) = \sum_{a_i<x} 1$ und $f(x) = \sum_{a_i|a_j, a_j<x} 1$. In einer vorhergehenden Arbeit bewiesen Verff., daß, falls die obere logarithmische Dichte von A positiv ist, die Ungleichung

$$f(x) > x \exp(c_1 (\log_2 x)^{1/2} \log_3 x)$$

für eine unendliche Folge von Werten x besteht; es gibt jedoch mindestens eine Folge A, positiver logarithmischer Dichte, mit der Eigenschaft, daß $f(x) < x \exp(c_2 \log_2 x)^{1/2} \log_3 x)$ für alle x gilt. (Bezeichnungen: $\exp z = e^z$, $\log_k x = \log(\log_{k-1} x)$, $\liminf_{x\to\infty}(A(x)/x) =$ untere Dichte der Folge A). Es wurde auch die Behauptung aufgestellt, daß die Positivität der Dichte A die Gleichung $\lim_{x\to\infty} f(x)/x = \infty$ zur Folge hat (die Positivität der logarithmischen Dichte von A genügt nicht). Darüber hinausgehend werden nun zwei Lehrsätze bewiesen.

1) Zu jedem reellen $\alpha, 1/(k+1) \leq \alpha \leq 1/k$ (k ganzrational), gibt es ein $c_1 = c_1(\alpha)$, so daß, falls A die untere Dichte α hat,

$$f(x) > x \cdot \exp(c_1 (\log_{k+1} x)^{1/2} \log_{k+2} x)$$

für alle genügend großen x gilt.

2) Zu jedem reellen α mit $1/(k+1) < \alpha < 1/k$, gibt es eine Folge A, deren Dichte α ist und ein $c_2 = c_2(\alpha)$, so daß

$$\liminf_{x\to\infty} f(x)(x \exp(c_2 (\log_{k+1} x)^{1/2} \log_{k+2} x))^{-1} = 0$$

gilt. Für $k > 1$ und $\alpha \to 1/(k+1)$ gilt $\lim c_2(\alpha) = 0$. Für $\alpha = 1/k$ und jede Funktion $g(x)$ mit $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ gibt es eine Folge A, deren Dichte α ist, so daß

$$\liminf_{x\to\infty} f(x)(x \exp(g(x)(\log_{k+1} x)^{1/2} \log_{k+2} x))^{-1} = 0$$

gilt.

Dieser zweite Satz zeigt, daß der erste "fast" bestmöglich ist. Einige mit den vorhergenden Sätzen zusammenhängende Fragen bleiben offen. Die Beweise beruhen im Prinzip auf einer Abzählung von Teilern, sind jedoch ziemlich lang, sehr scharfsinnig und nicht leicht. Sie stützen sich auf vier Hilfssätze.

E.Grosswald

Classification:

11B83 Special sequences of integers and polynomials