

---

**Zbl 161.43306****Erdős, Pál***On some new inequalities concerning extremal properties of graphs* (In English)  
**Theory of Graphs, Proc. Colloq. Tihany, Hungary 1966, 77-81 (1968).**

[For the entire collection see Zbl 155.00201.]

Die vorliegende Arbeit schließt sich an den von P. Turán stammenden Problemkreis an: es wird die kleinste ganze Zahl  $f(n; G)$  gesucht derart, daß sämtliche  $n$  Punkte und  $f(n; G)$  Kanten besitzende Graphen den Graphen  $G$  als Teilgraphen enthalten; ferner wird nach der Struktur eines zu einem Graphen  $G$  gehörigen extremen Graphen gefragt, worunter man jene  $n$  Punkte und  $f(n; G) - 1$  Kanten besitzenden Graphen versteht, die  $G$  nicht als Teilgraphen enthalten. Bekanntlich wurde dieses Problem von P. Turán für den Fall gelöst, daß  $G$  ein vollständiger  $r$ -Graph ist (bei beliebigem  $r$ ); oder in anderer Fassung, daß  $G$  ein vollständiger  $r$ -Graph ist (bei beliebigem  $r$ ); oder in anderer Fassung, daß  $G$  ein  $r$  Punkte besitzender  $r$ -chromatischer Graph  $K_r$  ist. Es ergab sich (mit der Bezeichnung  $K_r(p_1, \dots, p_r)$  für vollständige  $r$ -chromatische Graphen, wobei  $p_i$  Punkte die  $i$ -te Farbe besitzen, und je zwei verschieden gefärbte Punkte verbunden sind), daß die zu  $K_r = K_r(1, \dots, 1)$  gehörigen extremen Graphen alle die Struktur  $K_{r-1}(p_1, \dots, p_{r-1})$  haben, wobei die Zahlen  $p_i$  so wenig wie möglich von einander abweichen. Das Hauptergebnis vorliegender Arbeit (Satz 3) legt dar, daß die zu  $G$  gehörigen extremen Graphen auch dann von ähnlicher Struktur sind (mit Abweichungen infolge der Abhängigkeit von  $n$ ), wenn  $G$  bei beliebigem  $n$  ein  $n$  Punkte besitzender  $r$ -chromatischer Graph ist. Im Beweis wird eine auch an sich interessante untere Abschätzung des Graphen aller Punkte eines zu  $G$  gehörigen extremen Graphen benutzt. Mit Hilfe dieses Satzes wird eine, vom Verf. früher ohne Beweis mitgeteilte, obere Abschätzung von  $f(n; K_r(t, \dots, t))$  als ein Spezialfall eines in vorliegender Arbeit bewiesenen allgemeineren Satzes (Satz 1) bewiesen, der für ein 2-chromatisches  $G$  eine obere Abschätzung von  $f(n; \{G : K_{r-2}(t, \dots, t)\})$  angibt; wobei allgemein ein Graph  $[G : K_s(p_1, \dots, p_s)]$  aus  $G$  durch Hinzunahme von  $K_s(p_1, \dots, p_s)$  nebst Verbindung aller neuen Punkte mit sämtlichen Punkten von  $G$  entsteht. Es werden auch einige Vermutungen mitgeteilt, außerdem eine — vom Verf. durch komplizierte Methoden bewiesene — Verschärfung von Satz 1 (ohne Beweis).

*B. Andrásfai*

Classification:

05C35 Extremal problems (graph theory)