Zbl 064.12104
Erdős, Paul; Golomb, Michael
Functions which are symmetric about several points. (In English)
Nieuw Arch. Wiskunde, III. R. 3, 13-19 (1955).

Die Verff. betrachten die Funktionalgleichung

$$\sum_{m=1}^{n} \gamma_m f(z + c_m u) - f(z) = 0, \tag{1}$$

worin die γ_m, c_m $(m = 1, ..., n)$ feste komplexe Zahlen mit $\sum \gamma_m = 1$ und $c_m \neq 0$ sein sollen, und beweisen: Aus der Existenz einer wesentlich (d.h. fast überall) beschränkten komplexen Funktion $f(u)$ der komplexen Veränderlichen u, die nicht fast überall konstant ist, und der einer komplexen Zahl z, so daß für fast alle u Gleichung (1) gilt, folgt

$$\inf_{-\infty < r,s < \infty} \left| \sum_{m=1}^{n} \gamma_m |c_m|^{ir} \left(\frac{c_m}{|c_m|} \right)^s \right| = 0. \tag{2}$$

Umgekehrt folgt aus (2) die Existenz einer beschränkten, periodischen komplexen Funktion $f(u)$, die nicht fast überall konstant ist, und die einer nicht meßbaren, überall dichten komplexen Punktmenge Z von der Mächtigkeit des Kontinuums, so daß für alle $z \in Z$ und alle u Gleichung (1) gilt.
Insbesondere beantworten die Verff. ein analoges, von *R.P.Boas* (Zbl 050.28304) gestelltes Problem, das die spezielle (reelle) Funktionalgleichung $f(x + t) + f(x - t) - 2f(x) = 0$ betraf.
Wesentliches Beweismittel ist die Verwendung einer geeigneten Hamelschen Basis; auch die Theorie der Distributionen wird benutzt.

H.König

Classification:
30D05 Functional equations in the complex domain