
Zbl 050.38902
Erdős, Paul; Rogers, C.A.
The covering of n-dimensional space by spheres. (In English)
J. London Math. Soc. 28, 287-293 (1953).

Es sei ϑ_n^* das Infimum der Dichten der Überlagerung des R_n durch Kugeln von gleichen Radius. ϑ_n sei analog definiert, wo aber verlangt wird, daß die Mittelpunkte der Kugeln ein n-dimensionales Gitter bilden (reguläre Überdeckung). *R.P.Bambah* und *H.Davenport* (Zbl 047.05101) haben gezeigt, daß $\vartheta_n > 4/3 - \varepsilon_n$, wo $\varepsilon_n \to 0$ geht für $n \to \infty$. Die Verff. zeigen nun $\vartheta_n^* > 16/15 - \varepsilon_n$ ($\varepsilon \to 0$ für $n \to \infty$). Der Beweis dieser Abschätzung benützt die gleiche Methode wie früher. Es werden wieder konvexe Polyeder Π betrachtet, welche den R_n einfach und lückenlos überdecken, und jedes Polyeder ist einer zugehörigen Kugel der Überdeckung eingeschrieben. Dann ist die Anzahl N der Seitenflächen von Π abzuschätzen ("es sollen nicht zu viele sein"; dies geht für den regulären Fall leicht, ist aber schwieriger).
Es wird $N \leq \vartheta_n^* 4^n - 1$ gezeigt, und dann das Volumen von Π im Vergleich zum Volumen der umgeschriebenen Kugeln abzuschätzen. Ist $N = [4^n \vartheta_n^* - 1]$ und V_N das Volumen der größten Polyeder mit N Seitenflächen, welche in eine Kugel vom Radius 1 eingeschrieben werden, so ist ja $\vartheta_n^* \geq J_n/V_N, J_n$ Volumen der Kugel. Im regulären Fall liegt der Fußpunkt der Lote vom Mittelpunkt der Kugel auf die Seitenflächen von Π stets innerhabl der Seitenfläche.
Im allgemeinen Fall ist dies aber nicht so. Hier wird nun folgender Satz von C. A. Rogers benützt. Ist $V(\Pi)$ das Volumen eines konvexen Polyeders von N Seitenflächen in einer Kugel vom Radius 1 und Volumen J_n (im R_n) dann ist

$$\frac{J_n}{V(\Pi)} \geq \int_0^1 (1 - \bar{C}^\delta (1 - t^\delta))^{-n/2} dt,\ \delta = \frac{2}{n-1},\ \bar{C} = \frac{nV(\Pi)}{NJ_{n-1}}.$$

Streben die n, N gegen ∞, so daß $N^{1/n}$ gegen einen Limes λ strebt, dann ist $\overline{\lim} \frac{V(\Pi)}{J_n} \leq 1 - \frac{1}{\lambda^2}$. Da der Beweis dieses Satzes von Rogers kompliziert ist, so zeigen die Verff. in der Arbeit die schwächere Abschätzung $J_n/V(\Pi) \geq (1 - \bar{C}^\delta)^{-1/2} \overline{\lim} V(\Pi) J_n \leq (1 - \lambda^{-2})^{1/2}$, welches $\vartheta_n^* > (16/15)^{1/2} - \varepsilon_n$ heißt.

E.Hlawka

Classification:
11H31 Lattice packing and covering (number-theoretic results)
11H06 Lattices and convex bodies (number theoretic results)
52C17 Packing and covering in n dimensions (discrete geometry)