Zbl 034.07201
Erdős, Pál
On the strong law of large numbers. (In English)
Trans. Am. Math. Soc. 67, 51-56 (1949). [0002-9947]

$f(x) = f(x+1)$ besitze in $(0,1)$ den Mittelwert Null sowie die Streuung Eins und (n_k) sei eine Folge von natürlichen Zahlen mit $n_{k+1}/n_k > c > 1$. Die Frage, welche Bedingung das sog. starke Gesetz

$$g = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} f(n_k x)/N = 0$$

für fast alle x sichert, ist von Kac, Salem, Zygmund unlängst mit den n-ten Teilsummen $S_n(x)$ der Fourierreihe von $f(x)$ bei $\varepsilon > 0$ durch

$$A = \int_0^1 (f(x) - S_n(x))^2 dx = O(1/(\log n)^\varepsilon)$$

beantwortet worden. Hier wird gezeigt, daß sich diese Bedingung zu der nicht endgültigen $A = O((\log_2 n)^{2+\varepsilon})$ abschwächen läßt. Wenn auch bei $n_k = 2^k$ der Grenzwert $g = 0$ sich nach Raikov für jede Funktion $f(x)$ ergibt, muß sonst der Funktion $f(x)$ irgendeine Bedingung auferlegt werden. Es wird nämlich gezeigt, daß für eine unbeschränkte Funktion $f(x)$ bei geeigneter Folgen (n_k) sich

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \sum_{k=1}^{N} f(n_k x)/N = \infty$$

ergibt. Die Möglichkeit von $g = 0$ bei allen beschränkten $f(x)$ bleibt offen. Bezüglich der richtigen Größenordnung von A und des Divisors in g werden Vermutungen angegeben.

Szentmártony (Budapest)

Classification:
60F15 Strong limit theorems