Zbl 032.01301
Erdős, Pál
On the density of some sequences of integers. (In English)
Bull. Am. Math. Soc. 54, 685-692 (1948).

$\mathfrak{A} = \{a_1, a_2, ...\}$ sei eine Menge wachsend geordneter, positiver ganzer Zahlen, und für alle $n > 0$ und alle $k > 0$ sei $a_n \nmid a_{n+k}$. Die Menge $\mathfrak{B} = \{b_1, b_2, ...\}$ bestehe aus allen positiven ganzen Zahlen, die durch mindesten ein a_n teilbar sind. $\varphi(n; x; y_1, y_2, ..., y_m)$ bezeichne die Anzahl der positiven ganzen Zahlen $c \le n$, die durch x aber nicht durch $y_1, y_2, ..., y_m$ teilbar sind. Der Verf. beweist, daß $\mathfrak{B}$ dann und nur dann eine Dichte besitzt, wenn

$$(1) \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n} \sum_{n^{1-\varepsilon} < a_i \le n} \varphi(n; a_i; a_1, a_2, ...a_{i-1}) = 0$$

ist. Diese Bedingung ist speziell erfüllt, wenn für die Anzahlfunktion $B(n)$ der Menge $\mathfrak{B}$ stets $B(n) < cn/\log n$ gilt, was, wie der Verf. weiter zeigt, im folgenden Sinn sogar schon genau ist: Es sei $\lim_{n\to\infty} \psi(n) = \infty$. Dann gibt es eine solche Menge $\mathfrak{A}$, daß zwar $B(n) < \psi(n)n/\log n$ ist, $\mathfrak{B}$ jedoch keine Dichte besitzt.
Aus (1) folgt weiter, daß stets die Dichte einer solchen Menge existiert, die alle Zahlen enthält, die durch zwei gegebene Zahlen d_1, d_2 mit $d_1 < d_2 \le 2d_1$ teilbar sind. Am Schluß werden noch einige ungelöste Fragen erwähnt.

Ostmann (Marburg)

Classification:
11B83 Special sequences of integers and polynomials
11B05 Topology etc. of sets of numbers